SCHAUM'S ouTlines

全美经典 学习指导系列

工程电磁场基础

〔美〕J. A. 埃德米尼斯特尔 著

雷银照 吴静 等 译

- 涵盖全部课程基础
- 351道精选习题及其详解
- 451道补充习题及其答案
- 迅速提高解题能力
- 自学的最佳参考书

科学出版社

麦格劳-希尔教育出版集团

TN-0338.0101
责任编辑：马长芳



全球销量
超越3000万的
“全美经典学习指导系列”
是您的最佳
学习伴侣！

SCHAUM'S ouTlines



40年来最畅销的教辅系列
全美著名高校资深教授倾力之作
国内重点高校任课教师全力推荐并担当翻译
省时高效的学习辅导，全面详细的习题解答
迄今为止国内最全面的教辅系列
覆盖大学理工科专业

全美经典 学习指导系列

2000工程力学习题精解
工程力学
3000物理习题精解
流体动力学
物理学基础
材料力学
3000离散数学习题精解
工程热力学
数值分析
量子力学
有机化学习题精解
3000化学习题精解
大学化学习题精解
电路

电气工程基础
工程电磁场基础
数字信号处理
数字系统导论
数字原理
电机与机电学
基本电路分析
信号与系统
微生物学
生物化学
生物学
分子和细胞生物学
人体解剖与生理学

ISBN 7-03-009390-9



9 787030 093905 >

Mc Graw Hill

ISBN 7-03-009390-9/TN · 338
定 价：26.00元

全美经典学习指导系列

工程电磁场基础

〔美〕J.A. 埃德米尼斯特尔 著

雷银照 吴 静 等译 钱宝良 校

科学出版社

麦格劳-希尔教育出版集团

2002

内 容 简 介

本书是根据美国阿克伦大学 J.A. 埃德米尼斯特尔教授所著的"Theory and Problems of Electromagnetics"（第二版）译出的。

全书共有 17 章，主要介绍了工程电磁场的基本理论，内容涵盖了矢量分析、静电场、恒定电场、恒定磁场、时变场、电磁波、波导、天线、传输线以及磁路等。每章的结构相同，先介绍基本理论，然后给出了习题的详细求解过程，最后列出了一些补充习题，而且所有习题都附有答案。

本书列出了 394 道例题、426 道习题，适合强、弱电专业的本科生、研究生使用，对于从事电磁场课程教学的教师也有参考价值。

Joseph A. Edminister: Schaum's Outlines Theory and Problems of Electromagnetics, Second Edition

ISBN:0-07-018993-5

图字：01-2001-1762 号

图书在版编目（CIP）数据

工程电磁场基础/〔美〕埃德米尼斯特尔（Edminister, J. A.）著；雷银照等译. —北京：科学出版社，2002

（全美经典学习指导系列）

ISBN 7-03-009390-9

Ⅰ. 工… Ⅱ. ①埃… ②雷… Ⅲ. 电磁场-研究 Ⅳ. 0441. 4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 032671 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

[illegible]印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年1月第 一 版　开本：A4（890×1240）

2002年1月第一次印刷　印张：15 1/4

印数：1—4 000　字数：421 000

定价：26.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

译 者 序

电磁场理论是高等学校电类专业的一门技术基础课。由于电磁场无形、无色、无味，看不见摸不着，它的宏观规律隐含在用符号表示的麦克斯韦方程组中，所以这门课抽象、难学，需要反复琢磨才有可能建立正确的物理图像，也只有临摹大量的例题才能较快地掌握分析、求解问题的方法。正是基于这样的认识，我们翻译了这本书。

本书涵盖了工程电磁场基础知识的全部内容，包括矢量分析、静电场、恒定电场、恒定磁场、时变场、电磁波、波导、天线、传输线以及磁路等。全书共17章，每章都有相同的结构，先介绍基本理论，然后详细给出了习题的求解过程，最后列出了一些补充习题，而且所有习题都附有答案。本书列出了394道例题、426道习题，特别适合强、弱电专业的本科生、研究生使用，对于从事电磁场课程教学的教师也有参考价值。

本书由雷银照（第1章、附录）、吴静（第7、13、15、16章）、王新掌（第5、6、10、12章）、刘本田（第8、11、14、17章）、胡玉霞（第9章）、周俊华（第2章）、吴素文（第3章）、熊华俊（第4章）翻译。对于原书中明显的印刷错误，我们在翻译时也都给予了改正。本书由雷银照统稿，并加注了全书的译者注。校对由钱宝良担任。

由于译者的学术水平和英文水平有限，书中可能会有不少错误，欢迎读者批评指正。

译 者

2001年3月16日

前　言

本书第二版提供了三章新内容——传输线、波导和天线。对于学生和从事电磁场理论研究的专业人员来说，这些内容的引入使本书成为更强有力的工具。在这里，衷心感谢我的同事 M.L.Kult 和 K.F.Lee 对这一有价值资料的贡献。

此版保留第一版的基本做法：“像在其他绍姆大纲的书籍中一样，重点在于如何求解习题。每一章首先介绍基本理论，然后详细列举了大量的习题求解过程，并绘出许多图形，最后附有一些补充习题。全书尽可能使用简单的数学知识，避免抽象方法。在多年的教学实践中，我发现绘制草图有利于求解大部分习题。”

我希望把这本书再一次地奉献给我的学生。

J.A. 埃德米尼斯特尔

目　录

第1章 矢量分析

1.1 引言

矢量主要在物理和数学课程的笛卡儿坐标系中引入。虽然在微积分教科书中可以找到有关圆柱坐标的内容，但球坐标的内容却很少提到。在电磁理论中，这三种坐标都要用到。作为矢量和坐标系的表示法，不同的书籍可能也不相同。为了提出问题和解决问题，需要对本书中使用的表示法有个彻底的了解。

1.2 矢量符号

为了把**矢量**(具有大小和方向的量)和**标量**(只有大小的量)区别开来，矢量符号用黑体表示。**单位矢量**的绝对值(大小或长度)是1，本书将始终用小写黑体 **a** 来表示单位矢量。在矢量 **A** 方向上的单位矢量可用矢量 **A** 的绝对值除矢量 **A** 确定：

$$\mathbf{a}_A = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} \quad 或 \quad \frac{\mathbf{A}}{A}$$

用沿着笛卡儿坐标系 x、y 和 z 轴的单位矢量 $\mathbf{a}_x$、$\mathbf{a}_y$ 和 $\mathbf{a}_z$，可以把任意一个矢量表示成分量形式：

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z$$

根据各分量的含义，矢量的绝对值可定义为

$$|\mathbf{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

1.3 矢量代数

1. 矢量可以作加减运算。

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \pm \mathbf{B} &= (A_x\mathbf{a}_x + A_x\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z) \pm (B_x\mathbf{a}_x + B_y\mathbf{a}_y + B_z\mathbf{a}_z) \\ &= (A_x \pm B_x)\mathbf{a}_x + (A_y \pm B_y)\mathbf{a}_y + (A_z \pm B_z)\mathbf{a}_z\end{aligned}$$

2. 矢量运算满足结合律、分配律和交换律。

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$$

$$k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}, \quad (k_1 + k_2)\mathbf{A} = k_1\mathbf{A} + k_2\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

3. 两个矢量的**点积**定义为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\theta \qquad (读作“\mathbf{A} 点乘 \mathbf{B}”)$$

这里 θ 是 **A** 和 **B** 之间的小夹角[①]。由下面的例1可知

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

在特例情况下有 $|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}$。

例1 矢量点积服从分配律和标量乘法规则：

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \qquad \mathbf{A} \cdot k\mathbf{B} = k(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

从而有

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z) \cdot (B_x\mathbf{a}_x + B_y\mathbf{a}_y + B_z\mathbf{a}_z) \\ &= A_xB_x(\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_x) + A_yB_y(\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_y) + A_zB_z(\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z)\end{aligned}$$

---

① 小夹角是指不大于180°的角。——译者注

$$+ A_xB_y(\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y) + \cdots + A_zB_y(\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_y)$$

由于相同的单位矢量点乘时，夹角 $\theta=0°$，即 $\cos\theta=1$；不同的单位矢量点乘时，夹角 $\theta=90°$，即 $\cos\theta=0$，所以可得

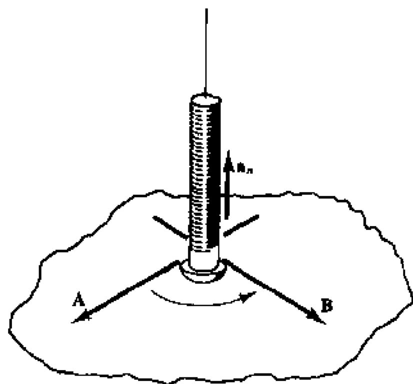


图 1-1

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

4．两个矢量的**叉积**定义为

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = (AB\sin\theta)\mathbf{a}_n \qquad (读作“\mathbf{A} 叉乘 \mathbf{B}”)$$

这里 θ 是 **A** 和 **B** 之间的小夹角，$\mathbf{a}_n$ 是垂直于从同一点出发的 **A** 和 **B** 所共同决定的平面的单位矢量。由于 $\mathbf{a}_n$ 有两个可选的方向，所以需要对 $\mathbf{a}_n$ 有更进一步的定义，我们规定当 **A** 朝向 **B** 旋转时，右手螺旋前进的方向就是所选择的法线的方向（见图1-1）。正是由于方向的原因，致使叉积不满足交换律，而满足

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A}$$

把叉积展开成分量形式，有

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{B} &= (A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z)\times(B_x\mathbf{a}_x + B_y\mathbf{a}_y + B_z\mathbf{a}_z)\\ &= (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{a}_x + (A_zB_x - A_xB_z)\mathbf{a}_y + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{a}_z\end{aligned}$$

上式可用行列式简单地表示成

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix}\mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

例 2 已知 $\mathbf{A}=2\mathbf{a}_x+4\mathbf{a}_y-3\mathbf{a}_z$，$\mathbf{B}=\mathbf{a}_x-\mathbf{a}_y$，求 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$。

解

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (2)(1)+(4)(-1)+(-3)(0) = -2$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix}\mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z\\ 2 & 4 & -3\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix} = -3\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y - 6\mathbf{a}_z$$

1.4 坐标系

一个问题无论是柱对称还是球对称，都可以在我们所熟知的笛卡儿坐标系中表示和求解，但这将显示不出对称性，而且在多数情况下会带来不必要的麻烦。因此，本书除了使用笛卡儿坐标系以外，还将用到圆柱坐标系和球坐标系。我们同时研究这三种坐标系以说明它们的相似和不同之处。

用三种坐标系来描述点 P，笛卡儿坐标系中为 (x,y,z)，圆柱坐标系中为 (r,φ,z)，球坐标系中为 (r,θ,φ)，如图 1-2 所示。我们应严格遵守坐标的表示顺序。角 φ 在圆柱坐标系和球坐标系中是指同一个角。但在坐标的顺序上，φ 位于圆柱坐标系的第二个位置上，而在球坐标系中它位于第三个位置上。同一个符号 r 在圆柱坐标系和球坐标系中有着完全不同的含义。在

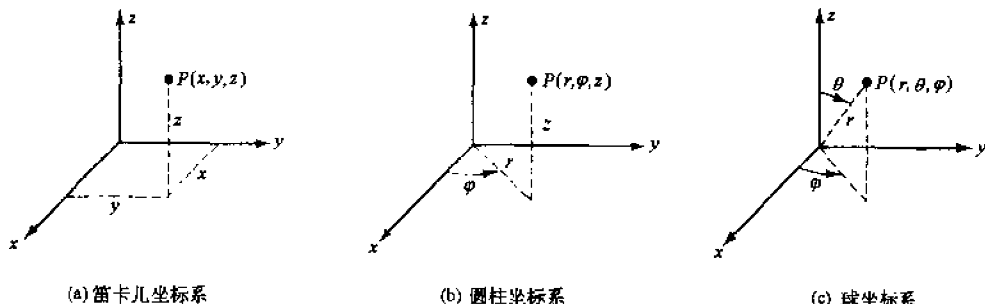


图 1-2

圆柱坐标系中 r 是点 P 到 xoy 平面的垂线与 z 轴的距离，而在球坐标系中 r 是原点到点 P 的距离。根据问题的上下文，可以清楚地判断 r 的确切含义。

一个点也可以用三个正交曲面来表示，如图 1-3 所示。在笛卡儿坐标系中，三个曲面分别是无限大平面 $x=$ const.[①]，$y=$ const. 和 $z=$ const.。在圆柱坐标系中，$z=$ const. 是与笛卡儿坐标系中相同的无限大平面，$\varphi=$ const. 是一边沿着 z 轴的半平面，$r=$ const. 是直圆柱面，这三个曲面正交且交点就是点 P。在球坐标系中，$\varphi=$ const. 是与圆柱坐标系中相同的半平面，$r=$ const. 是球心位于原点的球面，$\theta=$ const. 是以 z 轴为中心轴、顶点位于坐标原点的直圆锥面。需要注意，角 θ 的范围限定为 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$。

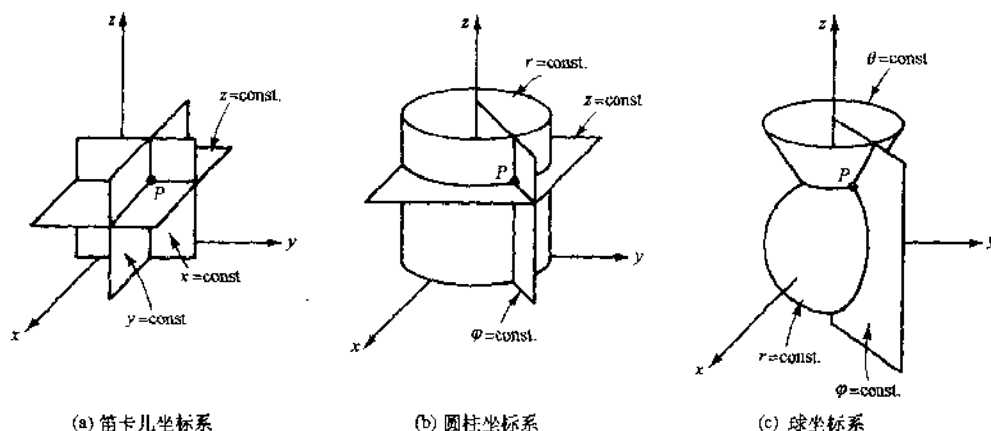


图 1-3

图 1-4 说明，点 P 处有三个单位矢量。在笛卡儿坐标系中，单位矢量有固定的方向，而与点 P 的位置无关。这在其他两个坐标系中并不成立(但 $\mathbf{a}_z$ 的方向例外)。任何一个单位矢量都垂直于它的坐标面，并朝向坐标增加的方向。需要说明的是，这三个坐标系都是右手坐标系：

$$\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z,\quad \mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\varphi = \mathbf{a}_z,\quad \mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\varphi$$

在以上三个坐标系中，一个矢量的分量形式可写为

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z \quad (\text{笛卡儿坐标系})$$

$$\mathbf{A} = A_r\mathbf{a}_r + A_\varphi\mathbf{a}_\varphi + A_z\mathbf{a}_z \quad (\text{圆柱坐标系})$$

$$\mathbf{A} = A_r\mathbf{a}_r + A_\theta\mathbf{a}_\theta + A_\varphi\mathbf{a}_\varphi \quad (\text{球坐标系})$$

应当注意分量 $A_x, A_y, \cdots, A_\varphi$ 一般不是常数，而是坐标系中坐标的函数。

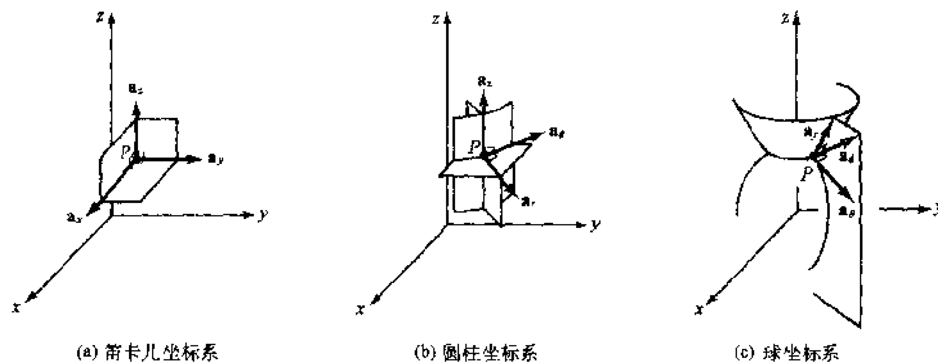


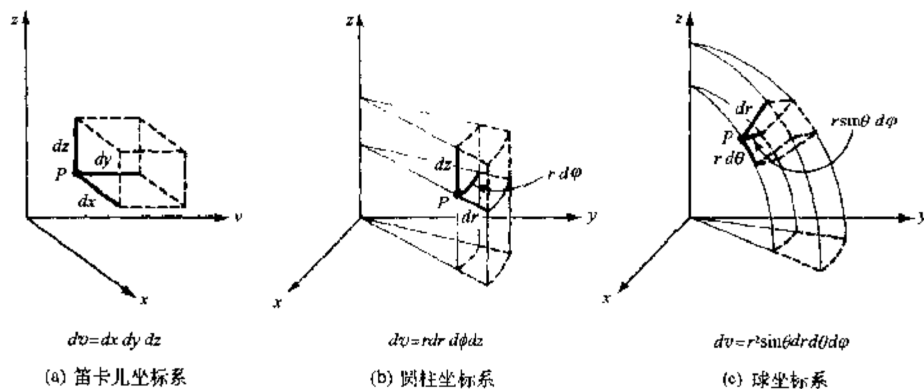
图 1-4

① const. 的含义是常数，它是英文单词 constant 的缩写。以后各章均如此。——译者注

1.5 微分体元、微分面元和微分线元

在电磁学中，大部分问题必须通过沿曲线、曲面或区域的积分才能求解，因此我们应对相应的微分元有充分的了解。

微分体元 dv 可通过点 P 处的坐标增量求出，当点 P 的坐标增加为 $(x+dx, y+dy, z+dz)$，或 $(r+dr, \varphi+d\varphi, z+dz)$，或 $(r+dr, \theta+d\theta, \varphi+d\varphi)$ 时，微分体积 dv 就形成了。在三个坐标系中，取微分体积是一阶无穷小量，微分体积 dv 对应的区域是长方体。在三个坐标系中，dv 的表达式由图 1-5 给出。



$dv=dx\,dy\,dz$ (a) 笛卡儿坐标系

$dv=r dr\, d\phi dz$ (b) 圆柱坐标系

$dv=r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi$ (c) 球坐标系

图 1-5

从图 1-5 也可以看出包围微分体积的面元的面积。例如在球坐标系中，垂直于 $\mathbf{a}_r$ 的微分面元是

$$dS = (rd\theta)(r\sin\theta d\varphi) = r^2\sin\theta d\theta d\varphi$$

微分线元 dl 是通过点 P 处的增量长方体的对角线长度，所以

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \text{(笛卡儿坐标系)}^{①}$$

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2 \quad \text{(圆柱坐标系)}$$

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2 \quad \text{(球坐标系)}$$

习 题 求 解

1.1 试说明图 1-6 中从点 $M(x_1, y_1, z_1)$ 到点 $N(x_2, y_2, z_2)$ 的矢量可表示成

$$(x_2 - x_1)\mathbf{a}_x + (y_2 - y_1)\mathbf{a}_y + (z_2 - z_1)\mathbf{a}_z$$

解 使用点 M 和 N 的坐标可以写出图 1-6 中的两个位置矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$：

$$\mathbf{A} = x_1\mathbf{a}_x + y_1\mathbf{a}_y + z_1\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{B} = x_2\mathbf{a}_x + y_2\mathbf{a}_y + z_2\mathbf{a}_z$$

于是

$$\mathbf{B} - \mathbf{A} = (x_2 - x_1)\mathbf{a}_x + (y_2 - y_1)\mathbf{a}_y + (z_2 - z_1)\mathbf{a}_z$$

1.2 在笛卡儿坐标系中求从点 $(2, -4, 1)$ 到点 $(0, -2, 0)$ 的矢量 $\mathbf{A}$，并写出它的单位矢量。

解

$$\mathbf{A} = (0-2)\mathbf{a}_x + [-2-(-4)]\mathbf{a}_y + (0-1)\mathbf{a}_z = -2\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$$

$$|\mathbf{A}|^2 = (-2)^2 + (2)^2 + (-1)^2 = 9$$

$$\mathbf{a}_A = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = -\frac{2}{3}\mathbf{a}_x + \frac{2}{3}\mathbf{a}_y - \frac{1}{3}\mathbf{a}_z$$

① dx^2 应理解为 $(dx)^2$，dy^2、dz^2、dr^2、$d\theta^2$ 和 $d\varphi^2$ 也是同样含义。—— 译者注

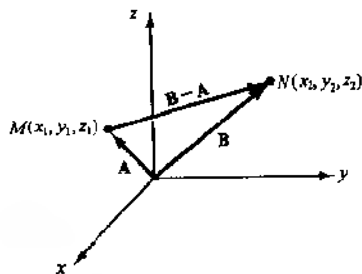


图 1-6

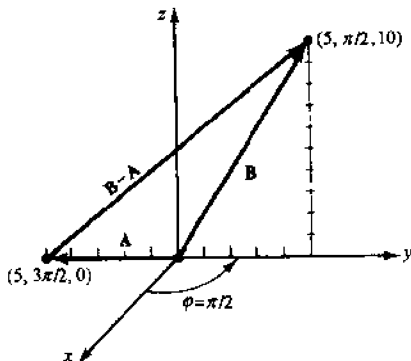


图 1-7

1.3 在圆柱坐标系中求点$(5,3\pi/2,0)$和点$(5,\pi/2,10)$之间的距 离。

解答 首先写出笛卡儿坐标系中的位置矢量 **A** 和 **B**(见图 1-7)：

$$\mathbf{A}=-5\mathbf{a}_y,\qquad \mathbf{B}=5\mathbf{a}_y+10\mathbf{a}_z$$

这样，$\mathbf{B}-\mathbf{A}=10\mathbf{a}_y+10\mathbf{a}_z$，从而两点间的距离是

$$|\mathbf{B}-\mathbf{A}|=10\sqrt{2}$$

在笛卡儿坐标系中，两点间的矢量可用习题 1.1 的方法得到，但在圆柱坐标系中却不能用相同的方法获得。

1.4 试说明 $\mathbf{A}=4\mathbf{a}_x-2\mathbf{a}_y-\mathbf{a}_z$ 和 $\mathbf{B}=\mathbf{a}_x+4\mathbf{a}_y-4\mathbf{a}_z$ 正交。

解答 因为矢量的点积包含 $\cos\theta$，所以任意两个非零矢量的点积为零意味着 $\theta=90°$，而

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=(4)(1)+(-2)(4)+(-1)(-4)=0$$

1.5 已知 $\mathbf{A}=2\mathbf{a}_x+4\mathbf{a}_y$ 和 $\mathbf{B}=6\mathbf{a}_y-4\mathbf{a}_z$，试分别用(a)叉乘，(b)点乘求矢量间的小夹角。

解答 (a)

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z\\ 2 & 4 & 0\\ 0 & 6 & -4\end{vmatrix}=-16\mathbf{a}_x+8\mathbf{a}_y+12\mathbf{a}_z$$

$$|\mathbf{A}|=\sqrt{(2)^2+(4)^2+(0)^2}=4.47,\qquad |\mathbf{B}|=\sqrt{(0)^2+(6)^2+(-4)^2}=7.21$$

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|=\sqrt{(-16)^2+(8)^2+(12)^2}=21.54$$

由于$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta$，所以

$$\sin\theta=\frac{21.54}{(4.47)(7.21)}=0.668\quad 或\quad \theta=41.9°$$

(b)

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=(2)(0)+(4)(6)+(0)(-4)=24$$

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|}=\frac{24}{(4.47)(7.21)}=0.745\ 或\ \theta=41.9°$$

1.6 已知 $\mathbf{F}=(y-1)\mathbf{a}_x+2x\mathbf{a}_y$，求点(2,2,1)处的矢量及该矢量在 **B** 上的投影，这里 $\mathbf{B}=5\mathbf{a}_x-\mathbf{a}_y+2\mathbf{a}_z$。

解答

$$\mathbf{F}(2,2,1)=(2-1)\mathbf{a}_x+(2)(2)\mathbf{a}_y=\mathbf{a}_x+4\mathbf{a}_y$$

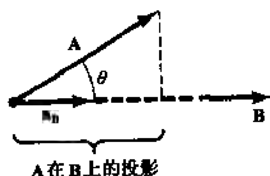


图 1-8

如图 1-8 所示，**A** 在 **B** 上的投影可通过 **B** 的单位矢量与 **A** 的点乘得到：

$$\mathbf{A}\ 在\ \mathbf{B}\ 上的投影=\mathbf{A}\cdot\mathbf{a}_B=\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}$$

因此，在点(2,2,1)处，有

$$\mathbf{F}\ 在\ \mathbf{B}\ 上的投影=\mathbf{F}\cdot\mathbf{a}_B=\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}=\frac{(1)(5)+(4)(-1)+(0)(2)}{\sqrt{30}}=\frac{1}{\sqrt{30}}$$

1.7 已知 $\mathbf{A}=\mathbf{a}_x+\mathbf{a}_y$，$\mathbf{B}=\mathbf{a}_x+2\mathbf{a}_z$，$\mathbf{C}=2\mathbf{a}_y+\mathbf{a}_z$，求$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$，并与$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$比较。

解答 先计算

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=2\mathbf{a}_x-2\mathbf{a}_y-\mathbf{a}_z$$

进而

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z\\ 2 & -2 & -1\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=-2\mathbf{a}_y+4\mathbf{a}_z$$

类似地可以计算出 $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=2\mathbf{a}_x-2\mathbf{a}_y+3\mathbf{a}_z$。因此，在矢量三重积中必须先进行圆括弧中的叉积运算。

1.8 用习题 1.7 中的矢量 **A**、**B** 和 **C**，求 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$，并与 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$ 比较。

由习题 1.7 可知，$\mathbf{B}\times\mathbf{C}=-4\mathbf{a}_x-\mathbf{a}_y+2\mathbf{a}_z$，则

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}=(1)(-4)+(1)(-1)+(0)(2)=-5$$

同样由习题 1.7 知，$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=2\mathbf{a}_x-2\mathbf{a}_y-\mathbf{a}_z$，这样

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}=(2)(0)+(-2)(2)+(-1)(1)=-5$$

在标量三重积中圆括弧不是必需的，因为只有先计算叉积才有意义。通常，标量三重积可表示为

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}$$

只要矢量呈现有相同的循环次序，其结果都是一样的。在这个循环次序中，标量三重积没有符号变化。

1.9 求圆柱坐标系中从 z 轴上的点 $z=h$ 指向点 $(r,\varphi,0)$ 的单位矢量，见图 1-9。

从图 1-9 可看出，矢量 **R** 是两个矢量的差：

$$\mathbf{R}=r\mathbf{a}_r-h\mathbf{a}_z,\quad \mathbf{a}_R=\frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}=\frac{r\mathbf{a}_r-h\mathbf{a}_z}{\sqrt{r^2+h^2}}$$

在以上表达式中角度 φ 虽然没有明确显示出来，但是 **R** 和 $\mathbf{a}_R$ 都通过 $\mathbf{a}_r$ 随着 φ 变化。

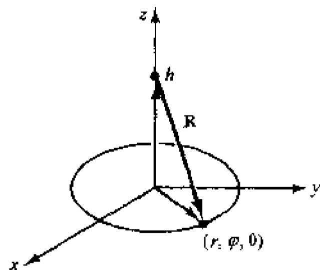


图 1-9

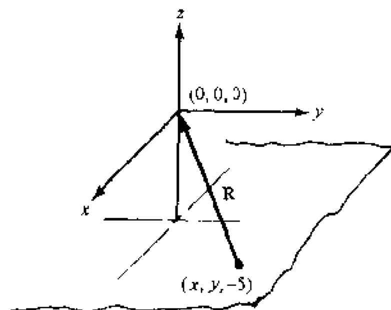


图 1-10

1.10 试写出在平面 $z=-5$ 上的任意点指向原点的单位矢量，见图 1-10。

由于该问题是在笛卡儿坐标系中提出的，所以利用习题 1.1 中的两点公式，可得

$$\mathbf{R}=-x\mathbf{a}_x-y\mathbf{a}_y+5\mathbf{a}_z,\quad \mathbf{a}_R=\frac{-x\mathbf{a}_x-y\mathbf{a}_y+5\mathbf{a}_z}{\sqrt{x^2+y^2+25}}$$

1.11 利用球坐标系，求半径为 a 的球面上环带 $0\leqslant\theta\leqslant\beta$ 的表面积（见图 1-11），进一步再求出当 $\alpha=0$ 和 $\beta=\pi$ 时的表面积。

由图 1-5(c) 可写出球面的微分面元为

$$dS=r^2\sin\theta d\theta d\varphi$$

于是

$$A=\int_0^{2\pi}\int_\alpha^\beta a^2\sin\theta d\theta d\varphi=2\pi a^2(\cos\alpha-\cos\beta)$$

把 $\alpha=0$ 和 $\beta=\pi$ 代入上式，得 $A=4\pi a^2$，这是整个球的表面积。

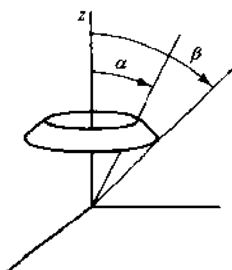


图 1-11

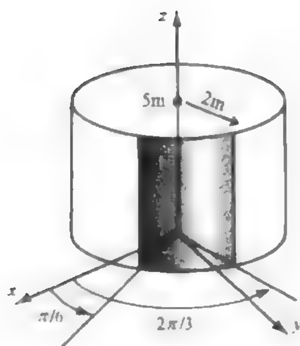


图 1-12

1.12 利用微分体元求半径为 a 的球的体积。

解 由图 1-5(c)可知 $dv = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$，从而得

$$v = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = \frac{4}{3}\pi a^3$$

1.13 利用圆柱坐标系，求直圆柱的侧面面积，其中 $r = 2\text{m}$, $h = 5\text{m}$, $30° \leqslant \varphi \leqslant 120°$，见图 1-12。

解 由于微分面元 $dS = r d\varphi dz$，所以

$$A = \int_0^5 \int_{\pi/6}^{2\pi/3} 2 d\varphi dz = 5\pi \ \text{m}^2$$

1.14 把笛卡儿坐标系中的矢量

$$\mathbf{A} = y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{a}_z$$

变换成圆柱坐标系中的矢量。

解 参考图 1-2(b)可知

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

因此

$$\mathbf{A} = r\sin\varphi \mathbf{a}_x + r\cos\varphi \mathbf{a}_y + r\cos^2\varphi \mathbf{a}_z$$

现在分别写出笛卡儿坐标系中的单位矢量在 $\mathbf{a}_r$，$\mathbf{a}_\varphi$ 和 $\mathbf{a}_z$ 上的投影：

$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_r = \cos\varphi, \ \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\varphi = -\sin\varphi, \ \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_z = 0$$

$$\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_r = \sin\varphi, \ \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\varphi = \cos\varphi, \quad \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z = 0$$

$$\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r = 0, \qquad \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\varphi = 0, \quad \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = 1$$

所以

$$\mathbf{a}_x = \cos\varphi \mathbf{a}_r - \sin\varphi \mathbf{a}_\varphi, \quad \mathbf{a}_y = \sin\varphi \mathbf{a}_r + \cos\varphi \mathbf{a}_\varphi, \quad \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z$$

于是

$$\mathbf{A} = 2r\sin\varphi\cos\varphi \mathbf{a}_r + (r\cos^2\varphi - r\sin^2\varphi)\mathbf{a}_\varphi + r\cos^2\varphi \mathbf{a}_z$$

1.15 在圆柱坐标系中，一大小为 10 的矢量从点$(5, 5\pi/4, 0)$指向原点，见图 1-13。试写出该矢量在笛卡儿坐标系中的表达式。

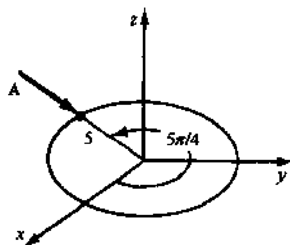


图 1-13

解 在圆柱坐标系中，该矢量可被表示成 $10\mathbf{a}_r$，而 $\varphi = \pi/4$，这样

$$A_x = 10\cos\frac{\pi}{4} = \frac{10}{\sqrt{2}},$$

$$A_y = 10\sin\frac{\pi}{4} = \frac{10}{\sqrt{2}}, \quad A_z = 0$$

所以

$$\mathbf{A}=\frac{10}{\sqrt{2}}\mathbf{a}_x+\frac{10}{\sqrt{2}}\mathbf{a}_y$$

注意径向坐标的值5没有实质性意义。

补 充 习 题

1.16 已知 $\mathbf{A}=4\mathbf{a}_y+10\mathbf{a}_z$，$\mathbf{B}=2\mathbf{a}_x+3\mathbf{a}_y$，求 **A** 在 **B** 上的投影。

答案：$12\sqrt{13}$

1.17 已知 $\mathbf{A}=(10/\sqrt{2})(\mathbf{a}_x+\mathbf{a}_z)$，$\mathbf{B}=3(\mathbf{a}_y+\mathbf{a}_z)$，试给出由 **B** 在 **A** 上的投影所构成的与 **A** 同方向的矢量表达式。

答案：$1.50(\mathbf{a}_x+\mathbf{a}_z)$

1.18 分别利用点乘和叉乘求出 $\mathbf{A}=10\mathbf{a}_y+2\mathbf{a}_z$ 和 $\mathbf{B}=-4\mathbf{a}_y+0.5\mathbf{a}_z$ 之间的夹角。

答案：161.5°

1.19 分别利用点乘和叉乘求出 $\mathbf{A}=5.8\mathbf{a}_y+1.55\mathbf{a}_z$ 和 $\mathbf{B}=-6.93\mathbf{a}_y+4.0\mathbf{a}_z$ 之间的夹角。

答案：135°

1.20 已知平面 $4x+3y+2z=12$，试写出该平面背离原点的单位法向矢量。

答案：$(4\mathbf{a}_x+3\mathbf{a}_y-2\mathbf{a}_z)/\sqrt{29}$

1.21 矢量场 **A** 和 **B** 处处平行，试写出 **A** 和 **B** 的笛卡儿分量所满足的关系式。

答案：$\dfrac{A_x}{B_x}=\dfrac{A_y}{B_y}=\dfrac{A_z}{B_z}$

1.22 试给出直线 $x=0$、$y=3$ 上任意点处指向原点的单位矢量表达式。

答案：$\mathbf{a}=\dfrac{-3\mathbf{a}_y-z\mathbf{a}_z}{\sqrt{9+z^2}}$

1.23 试给出平面 $y=-5$ 上任意点处指向点 (x_1,y_1,z_1) 的单位矢量表达式。

答案：$\mathbf{a}=\dfrac{(x_1-x)\mathbf{a}_x+(y_1+5)\mathbf{a}_y+(z_1-z)\mathbf{a}_z}{\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1+5)^2+(z_1-z)^2}}$

1.24 试给出平面 $z=-2$ 上任意点处指向点 $(0,0,h)$ 的单位矢量表达式。

答案：$\mathbf{a}=\dfrac{-x\mathbf{a}_x-y\mathbf{a}_y+(h+2)\mathbf{a}_z}{\sqrt{x^2+y^2+(h+2)^2}}$

1.25 已知 $\mathbf{A}=5\mathbf{a}_x$，$\mathbf{B}=4\mathbf{a}_x+B_y\mathbf{a}_y$，求 **A** 和 **B** 之间的夹角为45°时的 B_y。如果 **B** 中还有分量 $B_z\mathbf{a}_z$，此时 B_y 和 B_z 满足什么样的关系？

答案：$B_y=\pm 4$，　$\sqrt{B_y^2+B_z^2}=4$

1.26 说明 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ 的绝对值等于以 **A**，**B**，**C** 为边的平行六面体的体积（提示：首先说明平行六面体的底面积为 $|\mathbf{B}\times\mathbf{C}|$）。

1.27 已知 $\mathbf{A}=2\mathbf{a}_x-\mathbf{a}_z$，$\mathbf{B}=3\mathbf{a}_x+\mathbf{a}_y$，$\mathbf{C}=-2\mathbf{a}_x+6\mathbf{a}_y-4\mathbf{a}_z$，试说明 **C** 同时垂直于 **A** 和 **B**。

1.28 已知 $\mathbf{A}=\mathbf{a}_x-\mathbf{a}_y$，$\mathbf{B}=2\mathbf{a}_z$，$\mathbf{C}=-\mathbf{a}_x+3\mathbf{a}_y$，求 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$。改变矢量的位置后再求此标量三重积。

答案：-4，± 4

1.29 利用习题1.28中的矢量求 $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$。

答案：$-8\mathbf{a}_z$

1.30 求从点 $(2,-5,-2)$ 指向点 $(14,-5,3)$ 的单位矢量。

答案：$\mathbf{a}=\dfrac{12}{13}\mathbf{a}_x+\dfrac{5}{13}\mathbf{a}_z$

1.31 试求出球坐标系中点 $(10,3\pi/4,\pi/6)$ 到点 $(5,\pi/4,\pi)$ 的矢量。

答案：$-9.66\mathbf{a}_x-3.54\mathbf{a}_y+10.61\mathbf{a}_z$

1.32 试求出圆柱坐标系中点 $(2,\pi/6,0)$ 到点 $(1,\pi,2)$ 间的距离。

答案：3.53

1.33 试求出球坐标中点 $(1,\pi/4,0)$ 和点 $(1,3\pi/4,\pi)$ 间的距离。

答案：2.0

1.34 在半径为 a 的球面上,利用球坐标并积分,求区域 $0\leqslant\varphi\leqslant\alpha$ 的面积。进一步当 $\alpha=2\pi$ 时其结果为多少?

答案:$2\alpha a^2$, $A=4\pi a^2$

1.35 利用圆柱坐标,求半径为 a、高为 h 的直圆柱的侧面面积。

答案:$2\pi ah$

1.36 利用圆柱坐标并积分,求习题 1.35 中的直圆柱的体积。

答案:$\pi a^2 h$

1.37 在图 1-14 中,利用球坐标,分别写出记号为 1 和 2 的表面的微分面元 dS_1 和 dS_2,并进一步求出这两个表面的面积。

答案:$\pi/4$, $\pi/6$

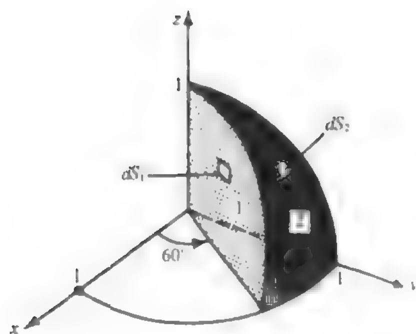


图 1-14

1.38 利用球坐标,求内半径为 2.00m、外半径为2.02m 的半球壳的体积。

答案:$0.162\pi\ \mathrm{m}^3$

1.39 写出球坐标系下微分体元的表达式,进一步积分求出区域 $1\leqslant r\leqslant 2$ m、$0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$、$0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$ 的体积。

答案:$\frac{7\pi}{6}\ \mathrm{m}^3$

第2章 库仑力和电场强度

2.1 库仑定律

两个点电荷之间的力与两点电荷电量的大小成正比，与两点电荷间距离的平方成反比，这就是**库仑定律**。它是从小的带电体和一个精密的扭秤试验中得来的。库仑定律用矢量形式可表示为

$$\mathbf{F}=\frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon d^2}\mathbf{a}$$

本书将采用有理化国际单位制，力的单位是N(牛顿)，距离的单位是m(米)，电荷的导出单位是C(库仑)。在库仑定律中引入因子4π可使单位制有理化，以便在后面的麦克斯韦方程中不再出现4π。ε是媒质的**介电常量**，单位是$C^2/(N\cdot m^2)$，它的等价单位是F/m(法拉每米)。对于自由空间或者真空，有

$$\varepsilon=\varepsilon_0=8.854\times10^{-12}\mathrm{F/m}\approx\frac{10^{-9}}{36\pi}\mathrm{F/m}$$

对于非自由空间电介质，$\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$，这里$\varepsilon_r$是**相对介电常量**。如果没有其他声明，在所有的习题和例题中都假定电介质为自由空间，介电常量的近似值为ε_0。

同号点电荷间的库仑力是排斥力，异号点电荷间的库仑力是吸引力。为体现这一性质，重写库仑定律如下：

$$\mathbf{F}_1=\frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0R_{21}^2}\mathbf{a}_{21}=\frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0R_{21}^3}\mathbf{R}_{21}$$

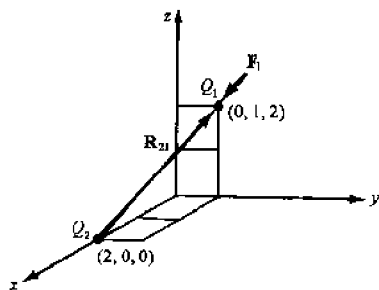


图2-1

这里$\mathbf{F}_1$是电荷Q_2作用在电荷Q_1上的力，$\mathbf{a}_{21}$是由Q_2指向Q_1的单位矢量，$\mathbf{R}_{21}=R_{21}\mathbf{a}_{21}$是由$Q_2$指向$Q_1$的位移矢量。

例1 求电荷$Q_2=-300\mu C$作用在电荷$Q_1=20\mu C$上的力，这里Q_1位于点(0,1,2)m处，Q_2位于点(2,0,0)m处。

解 因为C是一个相当大的单位，所以电荷经常用μC(微库)、nC(纳库)或pC(皮库)给出(见附录SI词头表)。参照图2-1，有

$$\mathbf{R}_{21}=-2\mathbf{a}_x+\mathbf{a}_y+2\mathbf{a}_z,\quad R_{21}=\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}=3$$

$$\mathbf{a}_{21}=\frac{1}{3}(-2\mathbf{a}_x+\mathbf{a}_y+2\mathbf{a}_z)$$

于是

$$\mathbf{F}_1=\frac{(20\times10^{-6})(-300\times10^{-6})}{4\pi(10^{-9}/36\pi)(3)^2}\left(\frac{-2\mathbf{a}_x+\mathbf{a}_y+2\mathbf{a}_z}{3}\right)=6\left(\frac{2\mathbf{a}_x-\mathbf{a}_y-2\mathbf{a}_z}{3}\right)\mathrm{N}$$

力的大小为6N，方向从Q_1指向Q_2(异性电荷相吸引)。

电荷间的这种力的关系是双线性的，因而，叠加原理是适用的，其他$n-1$个电荷Q_2，Q_3，…，Q_n作用在电荷Q_1上的力是各个电荷的作用力的**矢量和**：

$$\mathbf{F}_1=\frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0R_{21}^2}\mathbf{a}_{21}+\frac{Q_1Q_3}{4\pi\varepsilon_0R_{31}^2}\mathbf{a}_{31}+\cdots=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=2}^{n}\frac{Q_k}{R_{k1}^2}\mathbf{a}_{k1}$$

叠加原理可推广到电荷连续分布于某空间区域的情况，此时可用一**矢量积**分替代上面的矢量和(见2.3节)。

在仅含孤立电荷 Q 的区域中力场是球对称的。这可用下面的情况证实：将 Q 放置在球坐标系的原点，小试验电荷 $Q_t \ll Q$ 的位置矢量为 $r\mathbf{a}_r$，根据库仑定律，有

$$\mathbf{F}_t = \frac{Q_t Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r$$

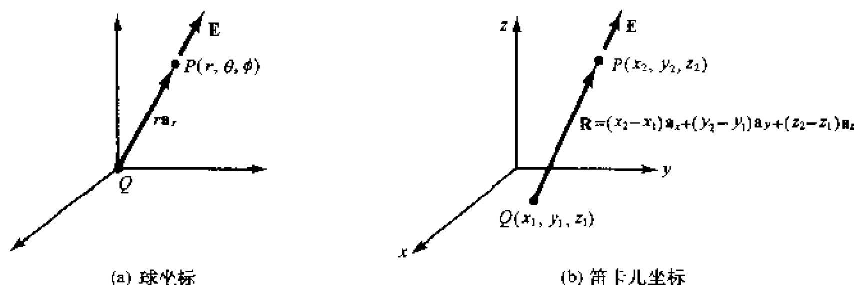
上式表明，在 $r=$ const. 的球面上，$|\mathbf{F}_t|$ 是常数且 $\mathbf{F}_t$ 的方向为径向。

2.2　电场强度

假设上面所考虑的试验电荷 Q_t 足够小，以致对固定点电荷 Q 的场没有多大干扰。于是由 Q 产生的**电场强度**定义为 Q_t 上每单位电荷所受的力：$\mathbf{E}=\mathbf{F}_t/Q_t$。

由于 Q 在球坐标系的原点处(见图2-2(a))，根据2.1节，任意点 P 处的电场强度是

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r$$



(a) 球坐标　(b) 笛卡儿坐标

图2-2

在任意坐标系中(见图2-2(b))，有

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\mathbf{a}_R$$

$\mathbf{E}$ 的单位是N/C(牛顿每库仑)，等价单位是V/m(伏特每米)。

例2　求笛卡儿坐标系中由原点处点电荷 $Q=0.5\mu$C 在点(0,3,4)m处产生的 $\mathbf{E}$。

解　此时

$$\mathbf{R} = 3\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z,\quad R = 5,\quad \mathbf{a}_R = 0.6\mathbf{a}_y + 0.8\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{E} = \frac{0.5\times10^{-6}}{4\pi(10^{-9}/36\pi)(5)^2}(0.6\mathbf{a}_y + 0.8\mathbf{a}_z)$$

从而 $|\mathbf{E}|=180$V/m，方向为 $\mathbf{a}_R=0.6\mathbf{a}_y+0.8\mathbf{a}_z$。

2.3　电荷分布

(1)体电荷

当电荷分布在一特定区域时，每一电荷元都在区域外任意点处产生电场。为了获得总的电场需要求和或者求积分。即使电荷是以电子或质子这种最小分割形式分布，也可以认为电荷分布是连续的(并认为是可微的)，并且定义**电荷密度**为

$$\rho = \frac{dQ}{dv}\ (\mathrm{C/m^3})$$

注意圆括号中的单位，它表明在SI单位制中，Q 的单位用C，v 的单位用 $\mathrm{m^3}$，而 ρ 被表示为 $\mathrm{C/m^3}$。本书使用SI单位制。

对于图2-3中的体积 v，每个微分电荷 dQ 都在观测点 P 处产生一个微分电场

$$d\mathbf{E}=\frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0R^2}\mathbf{a}_R$$

假定在这个区域中，电荷只被包含在体积 v 内，则点 P 处的总电场可通过在整个体积上的积分得到：

$$\mathbf{E}=\int_v\frac{\rho\mathbf{a}_R}{4\pi\varepsilon_0R^2}dv$$

(2)面电荷

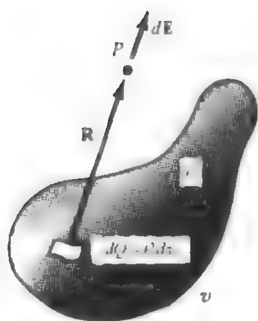


图 2-3

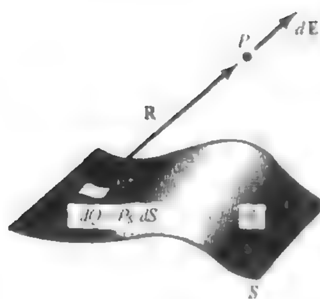


图 2-4

电荷也可能分布在一个面或一个薄片上。这个面上每个微分电荷 dQ 都在点 P 处产生一个微分电场

$$d\mathbf{E}=\frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0R^2}\mathbf{a}_R$$

见图 2-4。如果面电荷密度为 ρ_s(C/m²)，且在这个区域内没有其他电荷分布存在，那么点 P 处的总电场为

$$\mathbf{E}=\int_S\frac{\rho_s\mathbf{a}_R}{4\pi\varepsilon_0R^2}dS$$

(3)线电荷

如果电荷分布在某一曲线上，则沿着这条曲线上的每个微分电荷 dQ 都在点 P 处产生一个微分电场

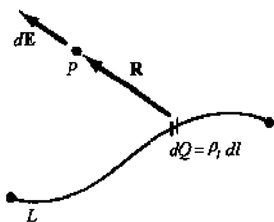


图 2-5

$$d\mathbf{E}=\frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0R^2}\mathbf{a}_R$$

见图 2-5。如果线电荷密度为 ρ_l(C/m)，且在这个区域内没有其他电荷分布存在，那么点 P 处的总电场为

$$\mathbf{E}=\int_L\frac{\rho_l\mathbf{a}_R}{4\pi\varepsilon_0R^2}dl$$

应当强调的是，在上面三种电荷分布和相应的求 $\mathbf{E}$ 的积分中，单位矢量 $\mathbf{a}_R$ 是依赖于电荷元 dQ 的坐标而变化的，因而 $\mathbf{a}_R$ 不能从被积函数中移出去。还应注意到，只要选取的积分存在且收敛，它就定义了在电荷分布内部某一点的电场 $\mathbf{E}$。

2.4 标准电荷形态

在 2.3 节中讨论了三种一般情况下的积分。在本节求电场强度时，这种积分要么是不必要的，要么就是很容易计算的。应当注意对于这些标准电荷形态(以及这一章将要讨论的其他电荷形态)，电荷并不是“分布在导体上”。例如，当题目中有“电荷以圆盘形式分布”这种表述时，它并不意味着电荷在圆盘形导体的表面上分布(表面带有电荷的导体将在第 6 章中讨论)。尽管理解这一点需要想象，但这些电荷仍应视为以某种特定形态悬浮于空中。

(1)点电荷

根据前面的定义,给出单个点电荷 Q 的场为

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r \quad (\text{球坐标})$$

见图 2-2(a)。这是一个球对称场,它像万有引力一样遵循**平方反比律**。

(2)无限长线电荷

如果电荷以均匀密度 ρ_l(C/m) 沿无限长直线分布——选该直线作为 z 轴——那么这个场是

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathbf{a}_r \quad (\text{圆柱坐标})$$

见图 2-6。这个场是圆柱对称的,并且与到线电荷的距离成反比。对 $\mathbf{E}$ 的推导见习题 2.9。

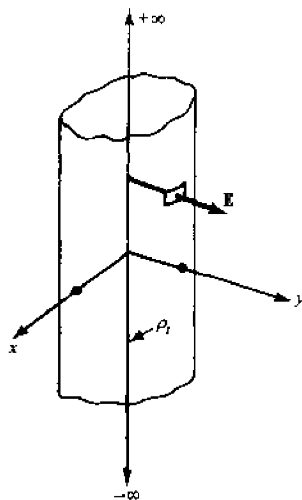


图 2-6

例 3 $\rho_l = 20$nC/m 的无限长均匀线电荷沿 z 轴放置。求点 (6,8,3)m 处的 $\mathbf{E}$。

解 在圆柱坐标系中,$r = \sqrt{6^2+8^2} = 10$m。这个场不随坐标 z 变化,因此

$$\mathbf{E} = \frac{20\times 10^{-9}}{2\pi(10^{-9}/36\pi)(10)}\mathbf{a}_r = 36\mathbf{a}_r \quad \text{V/m}$$

(3)无限大平面电荷

如果电荷以均匀密度 ρ_s(C/m²) 分布在无限大平面上,那么这个场为

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\mathbf{a}_n$$

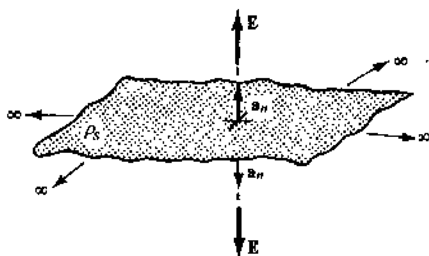


图 2-7

见图 2-7。这个场的大小是常数,且关于平面成镜像对称。对这个表达式的推导见习题 2.12。

例 4 电荷均匀分布在平面 $z = 10$cm 上,密度为 $\rho_s = (1/3\pi)$ nC/m²。求 $\mathbf{E}$。

解 $$|\mathbf{E}| = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} = \frac{(1/3\pi)10^{-9}}{2(10^{-9}/36\pi)} = 6 \quad \text{V/m}$$

在这个面以上($z > 10$cm),$\mathbf{E} = 6\mathbf{a}_z$ V/m;对于 $z < 10$cm,$\mathbf{E} = -6\mathbf{a}_z$ V/m。

习 题 求 解

2.1 两个点电荷,$Q_1 = 50\mu$C 和 $Q_2 = 10\mu$C,分别位于点(−1,1,−3)m 处和点(3,1,0)m 处(图 2-8)。求作用在 Q_1 上的力。

$$\mathbf{R}_{21} = -4\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_z, \qquad \mathbf{a}_{21} = \frac{-4\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_z}{5}$$

$$\mathbf{F}_1 = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{21}^2}\mathbf{a}_{21} = \frac{(50\times10^{-6})(10^{-5})}{4\pi(10^{-9}/36\pi)(5)^2}\left(\frac{-4\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_z}{5}\right)$$

$$= (0.18)(-0.8\mathbf{a}_x - 0.6\mathbf{a}_z) \quad \text{N}$$

力的大小为 0.18N,方向由单位矢量 $-0.8\mathbf{a}_x - 0.6\mathbf{a}_z$ 给出。用分量形式表示为

$$\mathbf{F}_1 = 0.144\mathbf{a}_x - 0.108\mathbf{a}_z \text{ N}$$

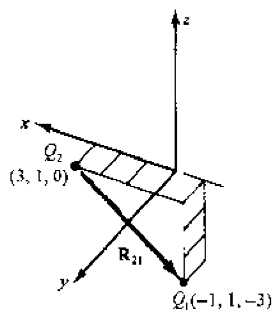


图 2-8

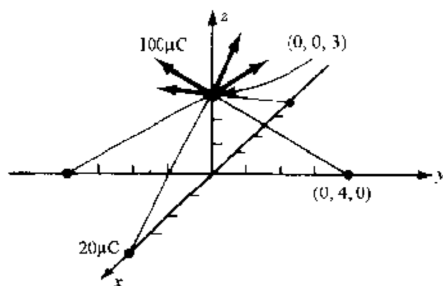


图 2-9

2.2 参照图 2-9。若有 4 个 20μC 的同号电荷分别位于 x 轴、y 轴上的 ±4m 处，求在点(0, 0, 3)m 处 100μC 的电荷所受的力。

解 考虑由 $y=4$ 处电荷所产生的力，有

$$\frac{(10^{-4})(20\times10^{-6})}{4\pi(10^{-9}/36\pi)(5)^2}\left(\frac{-4\mathbf{a}_y+3\mathbf{a}_z}{5}\right)$$

y 分量被 $y=-4$ 处的电荷所产生的力抵消了。同理，由另外两个电荷产生的力的 x 分量也抵消了。因此

$$\mathbf{F}=4\left(\frac{18}{25}\right)\left(\frac{3}{5}\mathbf{a}_z\right)=1.73\mathbf{a}_z\ \text{N}$$

2.3 参照图 2-10。位于点(1, −1, −3)m 处的点电荷 $Q_1=300\mu\text{C}$，受到来自点(3, −3, −2)m 处的点电荷 Q_2 的力为

$$\mathbf{F}_1=8\mathbf{a}_x-8\mathbf{a}_y+4\mathbf{a}_z\ \text{N}$$

试确定点电荷 Q_2。

解 因为

$$\mathbf{R}_{21}=-2\mathbf{a}_x+2\mathbf{a}_y-\mathbf{a}_z$$

注意到

$$\frac{8}{-2}=\frac{-8}{2}=\frac{4}{-1}$$

所以已知力的方向一定沿 $\mathbf{R}_{21}$（见习题 1.21），从而有

$$\mathbf{F}_1=\frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0R^2}\mathbf{a}_R$$

$$8\mathbf{a}_x-8\mathbf{a}_y+4\mathbf{a}_z=\frac{(300\times10^{-6})Q_2}{4\pi(10^{-9}/36\pi)(3)^2}\left(\frac{-2\mathbf{a}_x+2\mathbf{a}_y-\mathbf{a}_z}{3}\right)$$

解得

$$Q_2=-40\mu\text{C}$$

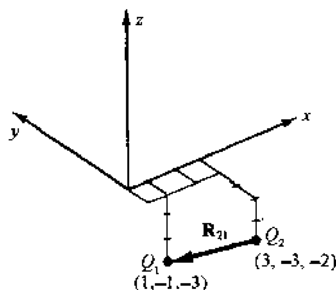


图 2-10

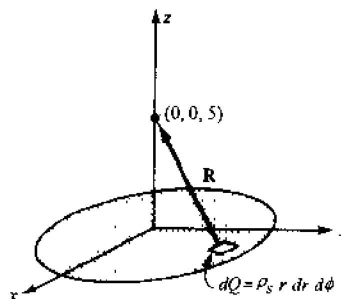


图 2-11

2.4 $500\pi\mu\text{C}$ 的电荷均匀分布于圆盘 $r\leqslant5\text{m}$、$z=0\text{m}$ 上，求作用在点(0, 0, 5)m 处 50μC 的电荷上的力（见图 2-11）。

解 面电荷的密度是

$$\rho_s = \frac{Q}{A} = \frac{500\pi \times 10^{-6}}{\pi(5)^2} = 0.2 \times 10^{-4}\mathrm{C/m^2}$$

在圆柱坐标系中，有

$$\mathbf{R} = -r\mathbf{a}_r + 5\mathbf{a}_z$$

于是每个微分电荷产生一个微分力

$$d\mathbf{F} = \frac{(50 \times 10^{-6})(\rho_s r dr d\varphi)}{4\pi(10^{-9}/36\pi)(r^2+25)}\left(\frac{-r\mathbf{a}_r + 5\mathbf{a}_z}{\sqrt{r^2+25}}\right)$$

在积分前，注意到径向分量抵消了，而 $\mathbf{a}_z$ 恒定。因此

$$\mathbf{F} = \int_0^{2\pi}\int_0^5 \frac{(50 \times 10^{-6})(0.2 \times 10^{-4})5r dr d\varphi}{4\pi(10^{-9}/36\pi)(r^2+25)^{3/2}}\mathbf{a}_z$$

$$= 90\pi\int_0^5 \frac{r dr}{(r^2+25)^{3/2}}\mathbf{a}_z = 90\pi\left[\frac{-1}{\sqrt{r^2+25}}\right]_0^5\mathbf{a}_z = 16.56\mathbf{a}_z\ \mathrm{N}$$

2.5 若圆盘半径为2m，重做习题2.4。

解 半径的减小有两种影响：一方面电荷密度之比变为

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(5)^2}{(2)^2} = 6.25$$

另一方面对 r 的积分变为

$$\int_0^2 \frac{r dr}{(r^2+25)^{3/2}} = 0.0143$$

而不再是

$$\int_0^5 \frac{r dr}{(r^2+25)^{3/2}} = 0.0586$$

这样，所求的力是

$$\mathbf{F} = (6.25)\left(\frac{0.0143}{0.0586}\right)(16.56\mathbf{a}_z) = 25.27\mathbf{a}_z\ \mathrm{N}$$

2.6 求位于点(x_1, y_1, z_1)处的点电荷 Q 在点 P 处产生的电场的表达式。若点电荷放在原点处重做此题。

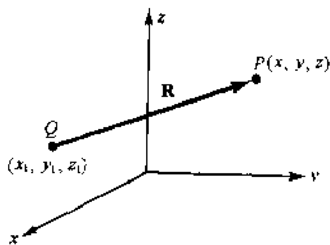


图2-12

解 如图2-12所示，有

$$\mathbf{R} = (x-x_1)\mathbf{a}_x + (y-y_1)\mathbf{a}_y + (z-z_1)\mathbf{a}_z$$

于是

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\mathbf{a}_R = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(x-x_1)\mathbf{a}_x + (y-y_1)\mathbf{a}_y + (z-z_1)\mathbf{a}_z}{[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2]^{3/2}}$$

当电荷位于原点处时，有

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

这个表达式不能体现出场的对称性。在球坐标系中，Q 位于原点处，有

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r$$

场的对称性显而易见。

2.7 在笛卡儿坐标系中，求位于点$(-4,3,2)$m处64.4 nC的点电荷在原点处产生的 $\mathbf{E}$。

解 位于球坐标系原点的点电荷 Q 产生的电场强度是

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r$$

在本题中，所要计算的是原点处的 $\mathbf{E}$，原点到电荷的距离是 $\sqrt{29}$m，矢量从电荷指向原点，$\mathbf{R} = 4\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z$。所以

$$\mathbf{E} = \frac{64.4 \times 10^{-9}}{4\pi(10^{-9}/36\pi)(29)}\left(\frac{4\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z}{\sqrt{29}}\right) = (20.0)\left(\frac{4\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z}{\sqrt{29}}\right)\ \mathrm{V/m}$$

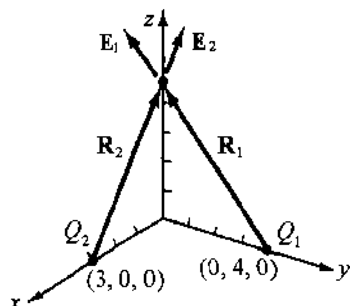


图 2-13

2.8 $Q_1=0.35\mu C$ 位于点(0,4,0)m 处,$Q_2=-0.55\mu C$ 位于点(3,0,0)m 处,求它们在点(0,0,5)m 处产生的 **E**(见图 2-13)。

解 $\mathbf{R}_1=-4\mathbf{a}_y+5\mathbf{a}_z,\quad \mathbf{R}_2=-3\mathbf{a}_x+5\mathbf{a}_z$

$$\mathbf{E}_1=\frac{0.35\times10^{-6}}{4\pi(10^{-9}/36\pi)(41)}\left(\frac{-4\mathbf{a}_y+5\mathbf{a}_z}{\sqrt{41}}\right)$$

$$=-48.0\mathbf{a}_y+60.0\mathbf{a}_z\ \text{V/m}$$

$$\mathbf{E}_2=\frac{-0.55\times10^{-6}}{4\pi(10^{-9}/36\pi)(34)}\left(\frac{-3\mathbf{a}_x+5\mathbf{a}_z}{\sqrt{34}}\right)$$

$$74.9\mathbf{a}_x-124.9\mathbf{a}_z\ \text{V/m}$$

于是 $\mathbf{E}=\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2=74.9\mathbf{a}_x-48.0\mathbf{a}_y-64.9\mathbf{a}_z$ V/m

2.9 电荷均匀分布于一无限长直线上,线电荷密度为常数。试推导一般点 P 处 **E** 的表达式。

解 利用圆柱坐标系,线电荷作为 z 轴(见图 2-14)。在点 P 处,有

$$d\mathbf{E}=\frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0R^2}\left(\frac{r\mathbf{a}_r-z\mathbf{a}_z}{\sqrt{r^2+z^2}}\right)$$

因为对于 z 上的每个 dQ 都有另外一个 dQ 在 $-z$ 上,所以电场的 z 分量抵消。于是

$$\mathbf{E}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho_l r dr}{4\pi\varepsilon_0(r^2+z^2)^{3/2}}\mathbf{a}_r$$

$$=\frac{\rho_l r}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{z}{r^2\sqrt{r^2+z^2}}\right]_{-\infty}^{\infty}\mathbf{a}_r=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathbf{a}_r$$

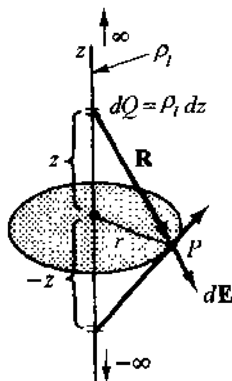


图 2-14

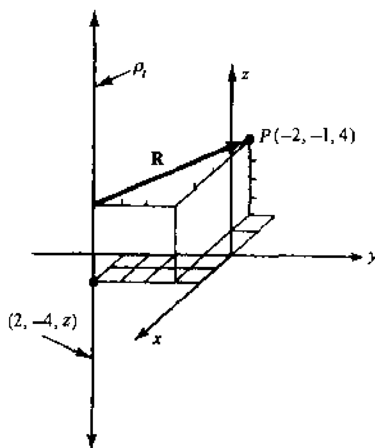


图 2-15

2.10 在 $x=2$m、$y=-4$m 所描述的直线上,均匀分布着密度为 $\rho_l=20$nC/m 的电荷。试确定点(−2, −1,4)m 处的电场 **E**。

解 在习题 2.9 中获得的表达式可用于本题。由于直线平行于 $\mathbf{a}_z$,所以这个场没有 z 分量。参照图 2-15,有

$$\mathbf{R}=-4\mathbf{a}_x+3\mathbf{a}_y$$

则
$$\mathbf{E}=\frac{20\times10^{-9}}{2\pi\varepsilon_0(5)}\left(\frac{-4\mathbf{a}_x+3\mathbf{a}_y}{5}\right)=-57.6\mathbf{a}_x+43.2\mathbf{a}_y\ \text{V/m}$$

2.11 如图 2-16 所示,密度为 $\rho_l=4$nC/m 的两均匀线电荷位于平面 $x=0$ 内 $y=\pm4$m 处。求点(4,0,10)m 处的 **E**。

解 这两个线电荷都平行于 $\mathbf{a}_z$,它们产生的场是径向场,且平行于 xoy 平面。对于每个线电荷,在点 P 处产生的场的大小是

$$E=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}=\frac{18}{\sqrt{2}}\text{V/m}$$

叠加后可得这两个线电荷产生的场为

$$\mathbf{E}=2\left(\frac{18}{\sqrt{2}}\cos45^\circ\right)\mathbf{a}_x=18\mathbf{a}_x\ \text{V/m}$$

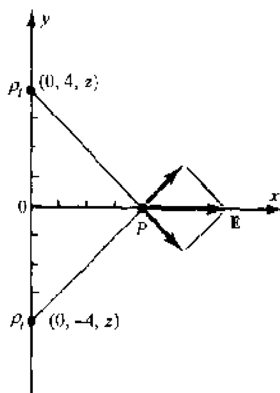


图 2-16

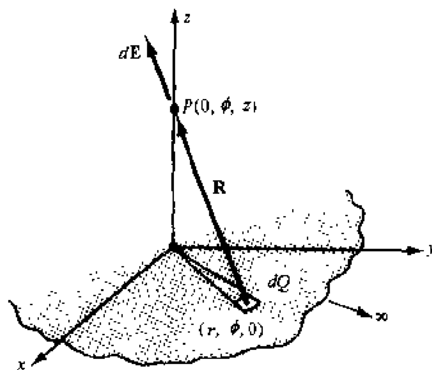


图 2-17

2.12 电荷均匀分布在无限大平面上,密度为 ρ_s,推导其产生的 **E** 的表达式。

如图 2-17 所示,利用圆柱坐标系可得

$$d\mathbf{E}=\frac{\rho_s r dr d\varphi}{4\pi\varepsilon_0(r^2+z^2)}\left(\frac{-r\mathbf{a}_r+z\mathbf{a}_z}{\sqrt{r^2+z^2}}\right)$$

电场关于 z 轴对称,径向分量抵消,所以

$$\mathbf{E}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\rho_s rz dr d\varphi}{4\pi\varepsilon_0(r^2+z^2)^{3/2}}\mathbf{a}_z$$

$$=\frac{\rho_s z}{2\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{\sqrt{r^2+z^2}}\right]_0^{\infty}\mathbf{a}_z=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\mathbf{a}_z$$

这个结果适用于 xoy 平面以上的任意点。在 xoy 平面以下,单位矢量变为 $-\mathbf{a}_z$。**E** 的推广形式可用单位法向矢量 $\mathbf{a}_n$ 写出:

$$\mathbf{E}=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\mathbf{a}_n$$

这个电场处处垂直于电荷平面且它的大小与离电荷平面的距离无关。

2.13 如图 2-18 所示,平面 $y=3\text{m}$ 上有密度为 $\rho_s=(10^{-8}/6\pi)\text{C/m}^2$ 的均匀电荷分布。确定各点处的 **E**。

对于 $y>3\text{m}$,有

$$\mathbf{E}=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\mathbf{a}_n=30\mathbf{a}_y\ \text{V/m}$$

对于 $y<3\text{m}$,有

$$\mathbf{E}=-30\mathbf{a}_y\ \text{V/m}$$

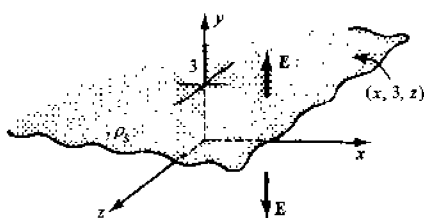


图 2-18

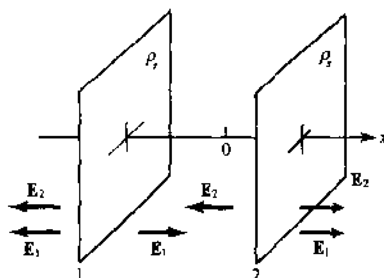


图 2-19

2.14 两个密度均为 ρ_s 的无限大均匀电荷平面位于 $x=\pm1$ 处(图 2-19)。试确定各区域中的 $\mathbf{E}$。

在图 2-19 中仅显示了两个电荷面的一部分。两面产生的场 $\mathbf{E}$ 沿 x 轴方向且与距离无关，于是

$$\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2=\begin{cases}-(\rho_s/\varepsilon_0)\mathbf{a}_x, & x<-1\\ 0, & -1<x<1\\ (\rho_s/\varepsilon_0)\mathbf{a}_x, & x>1\end{cases}$$

2.15 若平面 $x=-1$ 上的电荷面密度为 ρ_s，平面 $x=1$ 上的电荷面密度为 $-\rho_s$，重做习题 2.14。

$$\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2=\begin{cases}0, & x<-1\\ (\rho_s/\varepsilon_0)\mathbf{a}_x, & -1<x<1\\ 0, & x>1\end{cases}$$

2.16 $\rho_s=(1/3\pi)\mathrm{nC/m^2}$ 的均匀面电荷位于 $z=5\mathrm{m}$ 处，$\rho_l=(-25/9)\mathrm{nC/m}$ 的均匀线电荷位于 $z=-3\mathrm{m}$、$y=3\mathrm{m}$ 处。求 $(x,-1,0)\mathrm{m}$ 处的 $\mathbf{E}$。

这两个电荷分布形态均平行于 x 轴。因此，图 2-20 是采用从正 x 方向所看到的 yoz 平面。由面电荷产生的场为

$$\mathbf{E}_s=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\mathbf{a}_n$$

在点 P 处，$\mathbf{a}_n=-\mathbf{a}_z$，于是

$$\mathbf{E}_s=-6\mathbf{a}_z\ \mathrm{V/m}$$

由线电荷产生的场为

$$\mathbf{E}_l=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathbf{a}_r$$

于是在点 P 处

$$\mathbf{E}_l=8\mathbf{a}_y-6\mathbf{a}_z\ \mathrm{V/m}$$

总的电场是它们的和，即 $\mathbf{E}=\mathbf{E}_l+\mathbf{E}_s=8\mathbf{a}_y-12\mathbf{a}_z\ \mathrm{V/m}$。

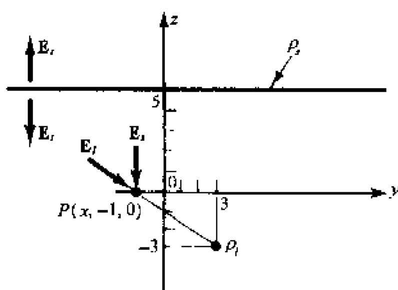


图 2-20

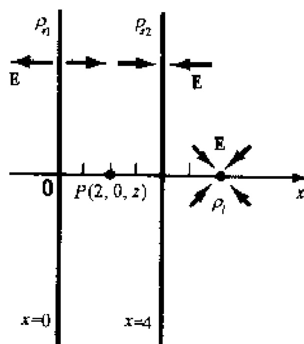


图 2-21

2.17 求由以下三种均匀分布的电荷在点 $(2,0,2)\mathrm{m}$ 处产生的 $\mathbf{E}$：在 $x=0\mathrm{m}$ 处 $\rho_{s1}=(1/3\pi)\mathrm{nC/m^2}$ 的均匀平面，在 $x=4\mathrm{m}$ 处 $\rho_{s2}=(-1/3\pi)\mathrm{nC/m^2}$ 的均匀平面，在 $x=6\mathrm{m}$、$y=0\mathrm{m}$ 上 $\rho_l=-2\mathrm{nC/m}$ 的均匀直线。

由于这三种电荷形态平行于 $\mathbf{a}_z$，所以场没有 z 分量。点 $(2,0,2)$ 和任意点 $(2,0,z)$ 具有相同的场。在图 2-21 中，点 P 位于两面电荷之间，由于两面所带电荷的符号不同，因而该场是相加的。从而有

$$\mathbf{E}=\frac{\rho_{s1}}{2\varepsilon_0}\mathbf{a}_n+\frac{\rho_{s2}}{2\varepsilon_0}\mathbf{a}_n+\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathbf{a}_r$$

$$=6\mathbf{a}_x+6\mathbf{a}_x+9\mathbf{a}_x=21\mathbf{a}_x\ \mathrm{V/m}$$

2.18 如图 2-22 所示，密度为 $\rho_l = 20\text{nC/m}$ 的电荷沿 z 轴均匀分布在 $z = \pm 5\text{m}$ 之间。试确定笛卡儿坐标系中点(2,0,0)m 处的 **E**，然后再用圆柱坐标表示答案。

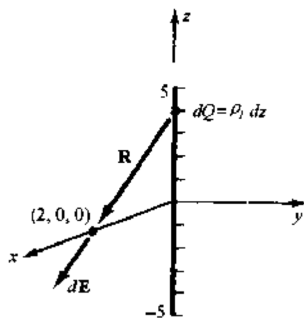


图 2-22

█ 因

$$d\mathbf{E} = \frac{20\times10^{-9}dz}{4\pi(10^{-9}/36\pi)(4+z^2)}\left(\frac{2\mathbf{a}_x - z\mathbf{a}_z}{\sqrt{4+z^2}}\right)\ \text{V/m}$$

电荷分布关于平面 $z=0$ 的对称性消去了电场中的 z 分量，所以

$$\mathbf{E} = 180\int_{-5}^{5}\frac{2dz}{(4+z^2)^{3/2}}\mathbf{a}_x = 167\mathbf{a}_x\ \ \text{V/m}$$

用圆柱坐标表示，有 $\mathbf{E} = 167\mathbf{a}_r$ V/m

2.19 电荷沿 z 轴分布于 $z = 5\text{m}$ 到 $z = \infty$ 之间以及 $z = -5\text{m}$ 到 $z = -\infty$ 之间(见图 2-23)，电荷线密度同习题 2.18 中一样均为 20nC/m。求点(2,0,0)m 处的 **E**。

█

$$d\mathbf{E} = \frac{20\times10^{-9}dz}{4\pi(10^{-9}/36\pi)(4+z^2)}\left(\frac{2\mathbf{a}_x - z\mathbf{a}_z}{\sqrt{4+z^2}}\right)\ \ \text{V/m}$$

同样电场的 z 分量为零，从而

$$\mathbf{E} = 180\left[\int_5^{\infty}\frac{2dz}{(4+z^2)^{3/2}} + \int_{-\infty}^{-5}\frac{2dz}{(4+z^2)^{3/2}}\right]\mathbf{a}_x$$
$$= 13\mathbf{a}_x\ \text{V/m}$$

用圆柱坐标表示，有 $\mathbf{E} = 13\mathbf{a}_r$ V/m。

当把习题 2.18 和习题 2.19 中的电荷分布形态叠加到一起时，就会形成一均匀线电荷，其产生的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r}\mathbf{a}_r = 180\mathbf{a}_r\ \text{V/m}$$

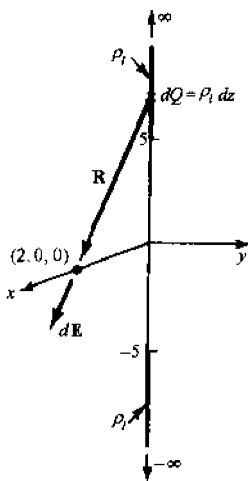


图 2-23

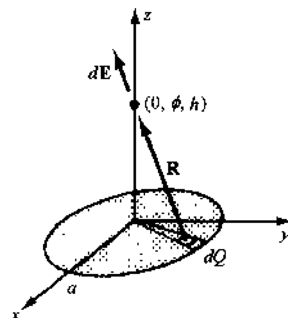


图 2-24

2.20 在圆柱坐标系中，求由均匀带电圆盘 $r \leqslant a$、$z = 0$ 在点$(0, \varphi, h)$处产生的电场强度 **E**(见图 2-24)。

█ 设电荷密度为常数 ρ_s，则

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_s r dr d\varphi}{4\pi\epsilon_0(r^2+h^2)}\left(\frac{-r\mathbf{a}_r + h\mathbf{a}_z}{\sqrt{r^2+h^2}}\right)$$

积分后径向分量消去，所以

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s h}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^a\frac{r dr d\varphi}{(r^2+h^2)^{3/2}}\mathbf{a}_z$$
$$= \frac{\rho_s h}{2\epsilon_0}\left(\frac{-1}{\sqrt{r^2+h^2}} + \frac{1}{h}\right)\mathbf{a}_z$$

注意到当 $a\to\infty$ 时，由均匀电荷平面产生的场 $\mathbf{E}\to(\rho_s/2\varepsilon_0)\mathbf{a}_z$。

2.21 密度为 $\rho_s=\rho_0\sin^2\varphi$ 的电荷位于 $r\leqslant a$、$z=0$ 的圆盘上。试确定点 $(0,\varphi,h)$ 处的 $\mathbf{E}$。



$$d\mathbf{E}=\frac{\rho_0(\sin^2\varphi)rdrd\varphi}{4\pi\varepsilon_0(r^2+h^2)}\left(\frac{-r\mathbf{a}_r+h\mathbf{a}_z}{\sqrt{r^2+h^2}}\right)$$

电荷分布虽然不是均匀的，却是对称的，以致场的径向分量消失，成为

$$\mathbf{E}=\frac{\rho_0 h}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^a\frac{(\sin^2\varphi)rdrd\varphi}{(r^2+h^2)^{3/2}}\mathbf{a}_z=\frac{\rho_0 h}{4\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{\sqrt{r^2+h^2}}+\frac{1}{h}\right)\mathbf{a}_z$$

2.22 密度为 $\rho_s=(10^{-4}/r)(\mathrm{C/m^2})$ 的电荷位于 $r\leqslant4$、$z=0$ 的圆盘上。试确定 $r=0$、$z=3\mathrm{m}$ 处的 $\mathbf{E}$。



$$d\mathbf{E}=\frac{(10^{-4}/r)rdrd\varphi}{4\pi\varepsilon_0(r^2+9)}\left(\frac{-r\mathbf{a}_r+3\mathbf{a}_z}{\sqrt{r^2+9}}\right)\ \mathrm{V/m}$$

同习题 2.20 和习题 2.21 一样，由于对称性，径向分量为零。从而有

$$\mathbf{E}=(2.7\times10^6)\int_0^{2\pi}\int_0^4\frac{drd\varphi}{(r^2+9)^{3/2}}\mathbf{a}_z=1.51\times10^6\mathbf{a}_z\ \mathrm{V/m}\ 或\ 1.51\mathbf{a}_z\ \mathrm{MV/m}$$

2.23 电荷位于平面 $z=-3\mathrm{m}$ 上由 $-2\leqslant x\leqslant2\mathrm{m}$、$-2\leqslant y\leqslant2\mathrm{m}$ 所确定的方块中，其密度为 $\rho_s=2(x^2+y^2+9)^{3/2}\mathrm{nC/m^2}$。求原点处的 $\mathbf{E}$。

 根据图 2-25，可得

$$\mathbf{R}=-x\mathbf{a}_x-y\mathbf{a}_y+3\mathbf{a}_z\quad \mathrm{m}$$

$$dQ=\rho_s dxdy=2(x^2+y^2+9)^{3/2}\times10^{-9}dxdy\quad \mathrm{C}$$

因此

$$d\mathbf{E}=\frac{2(x^2+y^2+9)^{3/2}\times10^{-9}dxdy}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+9)}\left(\frac{-x\mathbf{a}_x-y\mathbf{a}_y+3\mathbf{a}_z}{\sqrt{x^2+y^2+9}}\right)\quad \mathrm{V/m}$$

由于对称性，$\mathbf{E}$ 仅有 z 分量，从而有

$$\mathbf{E}=\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\frac{6\times10^{-9}dxdy}{4\pi\varepsilon_0}\quad\mathbf{a}_z=864\mathbf{a}_z\ \mathrm{V/m}$$

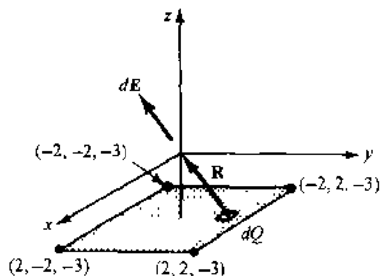


图 2-25

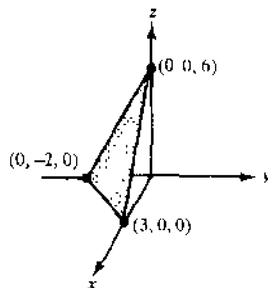


图 2-26

2.24 密度为 $\rho_s=0.3\mathrm{nC/m}$ 的电荷均匀覆盖在平面 $2x-3y+z=6\mathrm{m}$ 上。求含有原点那一侧的 $\mathbf{E}$。

 由于该电荷形态是一均匀平面，所以 $E=\rho_s/2\varepsilon_0$，$\mathbf{E}=(17.0)\mathbf{a}_n$ V/m。由于平面 $Ax+By+Cz=D$ 的单位法向矢量是

$$\mathbf{a}_n=\pm\frac{A\mathbf{a}_x+B\mathbf{a}_y+C\mathbf{a}_z}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

因此，该平面的单位法向矢量是

$$\mathbf{a}_n=\pm\frac{2\mathbf{a}_x-3\mathbf{a}_y+\mathbf{a}_z}{\sqrt{14}}$$

根据图 2-26，在含有原点一侧的单位法向矢量应取负号。这样在原点处的电场是

$$\mathbf{E}=(17.0)\left(\frac{-2\mathbf{a}_x+3\mathbf{a}_y-\mathbf{a}_z}{\sqrt{14}}\right)\ \mathrm{V/m}$$

补 充 习 题

2.25 两个点电荷 $Q_1=250\mu C$、$Q_2=-300\mu C$ 分别位于点(5,0,0)m 处和点(0,0,−5)m 处，求作用在 Q_2 上的力。

答案：$\mathbf{F}_2=(13.5)\left(\dfrac{\mathbf{a}_x+\mathbf{a}_z}{\sqrt{2}}\right)$ N

2.26 两个点电荷 $Q_1=30\mu C$、$Q_2=-100\mu C$ 分别位于点(2,0,5)m 处和点(−1,0,−2)m 处，求作用在 Q_1 上的力。

答案：$\mathbf{F}_1=(0.465)\left(\dfrac{-3\mathbf{a}_x-7\mathbf{a}_z}{\sqrt{58}}\right)$ N

2.27 在习题 2.26 中，求作用在 Q_2 上的力。

答案：$-\mathbf{F}_1$

2.28 4 个点电荷均为 $20\mu C$，分别位于 x、y 轴上的 ±4m 处。求点(0,0,3)m 处的 $100\mu C$ 的点电荷所受的力。

答案：$1.73\mathbf{a}_z$ N

2.29 10 个 $500\mu C$ 的相同点电荷沿半径为 2m 的圆周等距离分布。求对称轴上离圆平面 2m 处 $-20\mu C$ 的点电荷所受的作用力。

答案：$(79.5)(-\mathbf{a}_n)$ N

2.30 试确定原点处 $500\pi\mu C$ 的点电荷作用在点(0,0,5)m 处 $50\mu C$ 的点电荷上的力，并与习题 2.4 和习题 2.5 的答案相比较(习题 2.4 和习题 2.5 中的电荷分布在圆盘上，电荷总量保持不变)。

答案：$28.3\mathbf{a}_z$ N

2.31 在平面 $z=0$ 上 $x=\pm2$m 和 $y=\pm2$m 之间有一边长为 4m 的正方形中均匀分布着总量为 $500\mu C$ 的电荷，求它作用在点(0,0,5)m 处 $30\mu C$ 的点电荷上的力。

答案：$4.66\mathbf{a}_z$ N

2.32 两个相同的点电荷 Q(C)相距 d(m)。求沿两点电荷间连线上各点的电场 $\mathbf{E}$ 的表达式。

答案：设点电荷分别位于 $x=0$ 和 $x=d$ 处，则对于 $0<x<d$，有

$$\mathbf{E}=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(d-x)^2}\right]\mathbf{a}_x\ \text{V/m}$$

2.33 相等的点电荷 Q(C)位于边长为 l(m)的立方体的 8 个角上。验证作用在每个电荷上的库仑力的大小为$(3.29Q^2/4\pi\epsilon_0 l^2)$N。

2.34 试说明带有均匀电荷面密度 ρ_s 的球壳在其外边产生的电场 $\mathbf{E}$ 与球壳上的总电荷位于球心处时产生的电场 $\mathbf{E}$ 相同。

2.35 在笛卡儿坐标系中，推导均匀密度为 ρ_l 的无限长直线电荷分布产生的 $\mathbf{E}$ 的表达式。

答案：$\mathbf{E}=\dfrac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0}\dfrac{x\mathbf{a}_x+y\mathbf{a}_y}{x^2+y^2}$

2.36 $\rho_l=4$nC/m 的两个均匀线电荷均平行于 z 轴，位于 $x=0$、$y=\pm4$m 处。试确定(±4,0,z)m 处的电场 $\mathbf{E}$。

答案：$\pm18\mathbf{a}_x$ V/m

2.37 $\rho_l=5$nC/m 的两个均匀线电荷均平行于 x 轴，一个位于 $z=0$、$y=-2$m 处，另一个位于 $z=0$、$y=4$m 处，求点(4,1,3)m 处的 $\mathbf{E}$。

答案：$30\mathbf{a}_z$ V/m

2.38 $\rho_l=3.30$nC/m 的均匀线电荷位于 $x=3$m、$y=4$m 处，求它在原点产生的 $\mathbf{E}$。

答案：$-7.13\mathbf{a}_x-9.50\mathbf{a}_y$ V/m

2.39 参照习题 2.38，在哪些点上有与其相同的 $\mathbf{E}$ 值？

答案：$(0,0,z)$

2.40 已知由沿 z 轴的均匀线电荷在离 z 轴 2m 处产生的 $|\mathbf{E}|$ 是 1.80×10^{-4}V/m。求均匀电荷密度 ρ_l 的值。

答案：2.0μ C/m

2.41 平面 $-x+3y-6z=6$ m 上均匀分布有密度为 $\rho_s=0.53$ nC/m² 的电荷。求含有原点一侧的 $\mathbf{E}$。

答案：$30\left(\dfrac{\mathbf{a}_x-3\mathbf{a}_y+6\mathbf{a}_z}{\sqrt{46}}\right)$ V/m

2.42 均匀电荷密度为 $\rho_s=(10^{-9}/6\pi)\mathrm{C/m^2}$ 的两个无限大平面分别位于 $z=-5\mathrm{m}$ 和 $y=-5\mathrm{m}$ 处。若有一线电荷位于 $z=0$、$y=0$ 处，试确定在点(4,2,2)m 处产生相同大小的 **E** 需要的均匀线电荷密度 ρ_l。

答案：0.667nC/m

2.43 $\rho_s=-50\ \mathrm{nC/m^2}$ 的电荷均匀分布的平面位于 $y=2\mathrm{m}$ 处，$\rho_l=0.2\mu\mathrm{C/m}$ 的电荷均匀分布的直线位于 $z=2\mathrm{m}$、$y=-1\mathrm{m}$ 处。试确定区域中哪些点处的 **E** 为零？

答案：$(x,-2.273,2.0)\mathrm{m}$

2.44 $\rho_s=(-1/3\pi)\mathrm{nC/m^2}$ 的电荷均匀分布的平面位于 $z=5\mathrm{m}$ 处，$\rho_l=(-25/9)\mathrm{nC/m}$ 的电荷均匀分布的直线位于 $z=-3\mathrm{m}$、$y=3\mathrm{m}$ 处。求点(0,−1,0)m 处的电场 **E**。

答案：$8\mathbf{a}_y$ V/m

2.45 $\rho_l=(\sqrt{2}\times10^{-8}/6)\mathrm{C/m}$ 的电荷均匀分布的直线沿 x 轴放置，电荷均匀分布的平面位于 $y=5\mathrm{m}$，沿直线 $y=3\mathrm{m}$、$z=3\mathrm{m}$ 的电场 **E** 仅有 z 分量。该平面的 ρ_s 是多大？

答案：$125\mathrm{pC/m^2}$

2.46 $\rho_l=3.30\mathrm{nC/m}$ 的电荷均匀分布的直线位于 $x=3\mathrm{m}$、$y=4\mathrm{m}$ 处，点电荷 Q 距原点 2m。求原点处电场为零时点电荷 Q 的大小及其位置。

答案：5.28nC 在点(−1.2，−1.6,0)m 处

2.47 在平面 $z=0$ 上有一圆心在原点、半径为 2m 的电荷圆环，若电荷线密度为 $\rho_l=10\mathrm{nC/m}$，求原点处的点电荷 Q，使得它在点(0,0,5)m 处产生的电场 **E** 与圆环产生的相同。

答案：100.5nC

2.48 在平面 $z=0$ 中 $r\leqslant 2\mathrm{m}$ 的圆盘上具有电荷密度为 $\rho_s=10^{-8}/r(\mathrm{C/m^2})$ 的电荷分布。试确定点$(0,\varphi,h)$处的电场 **E**。

答案：$\dfrac{1.13\times10^3}{h\sqrt{4+h^2}}\mathbf{a}_z(\mathrm{V/m})$

2.49 当 h 大于 2m 时，验证习题 2.48 的结果，并把它与圆盘上总电荷集中于原点时在 h 处所产生的场相比较。

2.50 密度为 $\rho_s=2x(x^2+y^2+4)^{3/2}(\mathrm{C/m^2})$ 的有限电荷面位于平面 $z=0$ 中的 $0\leqslant x\leqslant 2\mathrm{m}$ 和 $0\leqslant y\leqslant 2\mathrm{m}$ 上。试确定点(0,0,2)m 处的 **E**。

答案：$(18\times10^9)\left(-\dfrac{16}{3}\mathbf{a}_x-4\mathbf{a}_y+8\mathbf{a}_z\right)\mathrm{V/m}=18\left(-\dfrac{16}{3}\mathbf{a}_x-4\mathbf{a}_y-8\mathbf{a}_z\right)\mathrm{GV/m}$

2.51 确定由沿 x 轴均匀分布于 $x=-5\mathrm{m}$ 和 $x=5\mathrm{m}$ 之间的 10nC 的电荷在点(8,0,0)m 处产生的电场 **E**。当同样总量的电荷分布于 $x=-1\mathrm{m}$ 和 $x=1\mathrm{m}$ 之间时，重算 **E**。

答案：$2.31\mathbf{a}_x$ V/m，$1.43\mathbf{a}_x$ V/m

2.52 $r\leqslant 1\mathrm{m}$、$z=0$ 的圆盘具有电荷密度 $\rho_s=2(r^2+25)^{3/2}e^{-10r}(\mathrm{C/m^2})$。求点(0,0,5)m 处的 **E**。

答案：$5.66\mathbf{a}_z$ GV/m

2.53 试说明均匀带电球壳内部的电场处处为零。

2.54 在半径为 a 的球体中分布着密度为常数 ρ 的电荷，利用习题 2.34 和习题 2.35 中的结论说明

$$\mathbf{E}=\begin{cases}\dfrac{r\rho}{3\varepsilon_0}\mathbf{a}_r, & r\leqslant a\\[2mm] \dfrac{a^3\rho}{3\varepsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r, & r\geqslant a\end{cases}$$

其中 r 是距球心的距离。

第3章 电通量和高斯定律

3.1 区域内的净电荷

利用2.3节中定义的电荷密度，通过积分可得到给定区域中的净电荷。由

$$dQ = \rho dv$$

得

$$Q = \int_v \rho dv$$

通常，体积 v 内的 ρ 不是常数。

例1 若

$$\rho = \frac{5\cos^2\varphi}{r^4} \quad (\mathrm{C/m^3})$$

求球坐标系中区域 $1\leqslant r\leqslant 2\mathrm{m}$ 内的电荷。

解 通过积分，得

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^2\left(\frac{5\cos^2\varphi}{r^4}\right)r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi = 5\pi\ \mathrm{C}$$

3.2 电通量和电通量密度

在解决某些问题时，标量**电通量** Ψ 和矢量电通量密度 $\mathbf{D}$ 是有用的量，这将在本章和后续几章中看到。与 $\mathbf{E}$ 不同，Ψ 和 $\mathbf{D}$ 是不能直接测量到的量，它们是19世纪静电学实验中所推断的量。

例2 参考图3-1，首先在某一合适的位置上固定电荷 $+Q$，然后用一同心的导电球壳包围它。设最初时刻球壳表面上没有净电荷。当开关闭合**瞬时**形成一个接地的导电通路后，在球壳上就会分布有与球心处电荷大小相等但符号相反的电荷 $-Q$。电荷 $-Q$ 的出现可认为是负电荷以短暂的时间经开关流到了球壳上。那么，为什么会流向球壳？早期的实验表明，$+Q$ 的通量在球壳上感应出了或**转移**了电荷 $-Q$。因此，电荷也被称为**位移通量**，而符号 D 的使用暗示着这个概念早期的含意①。

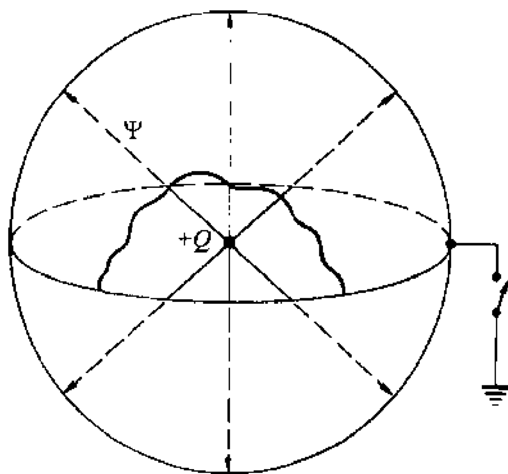


图3-1

根据定义，电通量 Ψ 从正电荷发出止于负电荷。当不存在负电荷时，通量 Ψ 终止于无穷远处。同样，根据定义，1库仑的电荷产生1库仑的电通量。因此

$$\Psi = Q$$

在图3-2(a)中，通量线从 $+Q$ 发出止于 $-Q$，这里假定两个电荷大小相等。在区域中只有正电

① 符号 D 取自英文 displacement（位移、移动）的第一个字母。——译者注

荷而没有负电荷的情况用图 3-2(b)说明。这里,通量线等分空间并遍及整个立体角伸向无穷远处。

若在点 P 附近,通量线与单位矢量 $\mathbf{a}$ 的方向一致(见图 3-3),并且通量 $d\Psi$ 穿过与 $\mathbf{a}$ 垂直的微分面 dS,那么点 P 处的**电通量密度**是

$$\mathbf{D} = \frac{d\Psi}{dS}\mathbf{a} \quad (\mathrm{C/m^2})$$

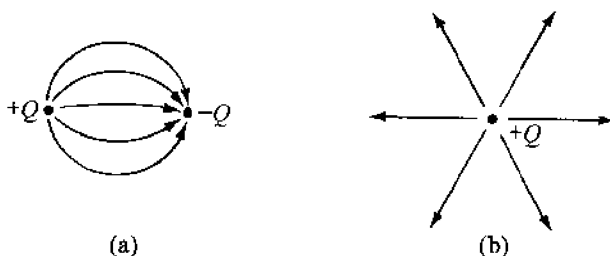


图 3-2

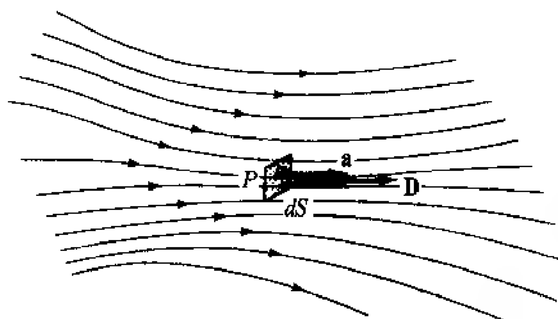


图 3-3

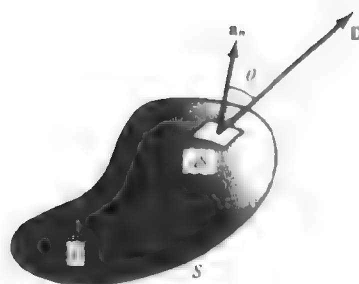


图 3-4

如图 3-4 所示,曲面 S 包围一密度为 $\rho(\mathrm{C/m^3})$ 的体电荷分布区域。根据定义,由于 1C 的电荷 Q 产生 1C 的电通量 Ψ,所以穿过闭合曲面 S 的净通量是它包围的净电荷量。然而,曲面 S 各点上的电通量密度 $\mathbf{D}$ 在大小和方向上可能不同。通常,$\mathbf{D}$ 不沿 S 的法向。若 $\mathbf{D}$ 与面元 dS 的法向成 θ 角,那么通过 dS 的微分通量为

$$d\Psi = DdS\cos\theta = \mathbf{D}\cdot dS\mathbf{a}_n = \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}$$

其中 $d\mathbf{S}$ 是矢量面元,其大小为 dS,方向为 $\mathbf{a}_n$。若选取单位矢量 $\mathbf{a}_n$ 指向 S 的外侧,则 $d\Psi$ 是从 S 内侧穿过 dS 的通量。

3.3 高斯定律

高斯定律可表述为**穿过闭合面的总通量等于该面内的净电荷**,用积分形式可写为

$$\oint \mathbf{D}\cdot dS = Q_{enc}$$

通过巧妙地选择积分面可从高斯定律中获得大量有用的信息,见 3.5 节。

3.4 电通量密度和电场强度之间的关系

考虑原点处的点电荷 Q(为了简单起见,假定为正电荷),见图 3-5。用一半径为 r 的球面包围该电荷,根据对称性,在球面上由 Q 产生的 $\mathbf{D}$ 的大小不变且处处与球面垂直。于是,由高斯定律给出

$$Q = \oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = D\oint dS = D(4\pi r^2)$$

根据上式，$D=Q/4\pi r^2$。因此

$$\mathbf{D}=\frac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{a}_n=\frac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{a}_r$$

另外，根据2.2节，由Q产生的电场强度是

$$\mathbf{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r$$

由此得到$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}$。

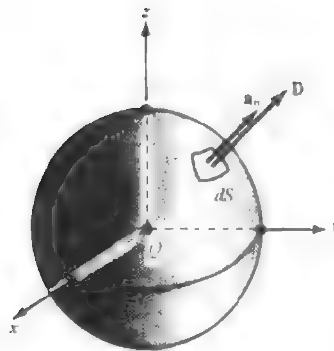


图 3-5

更一般地，对于介电常量为ϵ的各向同性介质中的电场，有

$$\mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E}$$

由于$\mathbf{D}$和$\mathbf{E}$仅相差一个常量因子，所以它们具有完全相同的表达形式。由电荷形态产生的电通量密度$\mathbf{D}$不是介电常量ϵ的函数，而电场$\mathbf{E}$是ϵ的函数。在涉及多种电介质的问题中，首先求得场量$\mathbf{D}$有一个明显的好处，就是能在每种电介质中由$\mathbf{D}$方便地转换成$\mathbf{E}$。

3.5 特殊高斯面

高斯定律中所要求的曲面必须是闭合的，它可由几个曲面单元组成。如果通过选择曲面单元使$\mathbf{D}$与之垂直或平行，并且在与$\mathbf{D}$垂直的任何曲面单元上$|\mathbf{D}|$为常数，那么积分就变得十分简单。因此，**特殊高斯面**的判别条件是：

1. 曲面闭合。
2. 在曲面上每一点处，$\mathbf{D}$与曲面垂直或平行。
3. 在与$\mathbf{D}$垂直的那部分曲面上，D是分区恒定的。

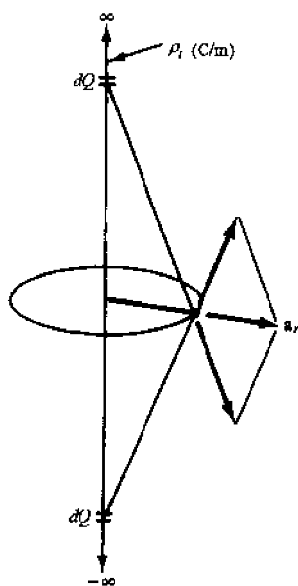


图 3-6

例3 用特殊高斯面求由均匀线电荷ρ_l产生的$\mathbf{D}$。

解 取线电荷作为圆柱坐标的z轴(图3-6)。根据柱面对称，$\mathbf{D}$只有r分量，并且这个分量仅依赖于r。因此，对于这个问题，可取轴线位于z轴的闭合直圆柱面作为特殊高斯面(图3-7)。应用高斯定律，得

$$Q=\int_1\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}+\int_2\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}+\int_3\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}$$

在面1和3上，$\mathbf{D}$和$d\mathbf{S}$垂直，积分等于零。在面2上，$\mathbf{D}$和$d\mathbf{S}$平行(若ρ_l为负则反向平行)，且因为r为常数，所以D为常数。这样

$$Q=D\int_2 dS=D(2\pi rL)$$

其中L是圆柱的长度。面被包围的电荷$Q=\rho_l L$，因此

$$D=\frac{\rho_l}{2\pi r},\qquad \mathbf{D}=\frac{\rho_l}{2\pi r}\mathbf{a}_r$$

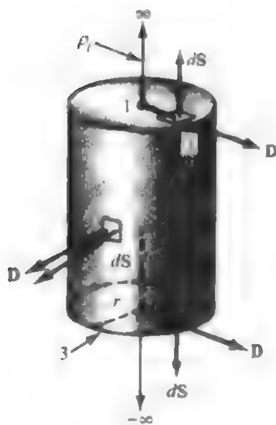


图 3-7

与习题2.9相比，上述推导十分简单。

特殊高斯面方法的严重局限性是它仅能应用于高度对称分布的电荷形态。对于其他电荷形态，在非常接近或非常远离电荷的位置，用这种方法仍能快速得到场的近似值，见习题3.36。

习 题 求 解

3.1 若 $\rho=30x^2y$ ($\mu C/m^3$)，求由 $0\leqslant x\leqslant 1m$、$0\leqslant y\leqslant 1m$、$0\leqslant z\leqslant 1m$ 所限定的体积内的电荷。进一步，在 $-1\leqslant y\leqslant 0m$ 这个范围有什么变化？

■ 由于

$$dQ=\rho dv$$

所以

$$Q=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 30x^2y\,dx\,dy\,dz=5\mu C$$

对于 $0\leqslant y\leqslant 1m$，有

$$Q=\int_0^1\int_{-1}^0\int_0^1 30x^2y\,dx\,dy\,dz=-5\mu C$$

3.2 曲面 S 内有三个点电荷，$Q_1=30nC$, $Q_2=150nC$, $Q_3=-70nC$，穿过 S 的净通量是多大？

■ 由于定义了电通量是从正电荷发出止于负电荷，所以从正电荷发出的一部分通量止于负电荷。从而所求为

$$\Psi_{net}=Q_{net}=30+150-70=110\ nC$$

3.3 如图 3-8 所示，电荷以平面圆盘形式分布，半径为 4m，密度 $\rho_s=(\sin^2\varphi)/2r$ (C/m^2)，穿过闭合面 S 的净通量是多大？

■

$$\Psi=Q=\int_0^{2\pi}\int_0^4\left(\frac{\sin^2\varphi}{2r}\right)r\,dr\,d\varphi=2\pi(C)$$

3.4 曲面 S 内有一半径为 4m 的圆盘，电荷密度为 $\rho_s=12\sin\varphi\mu(C/m^2)$。穿过闭合面 S 的净通量是多大？

■

$$\Psi=Q=\int_0^{2\pi}\int_0^4(12\sin\varphi)r\,dr\,d\varphi=0\ \mu C$$

因 $\sin(\varphi+\pi)=-\sin\varphi$，圆盘上有等量的正负电荷，所以没有净通量穿过 S。

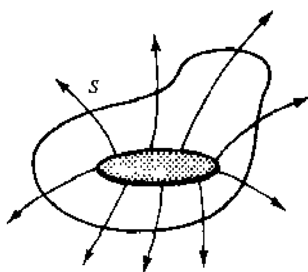


图 3-8

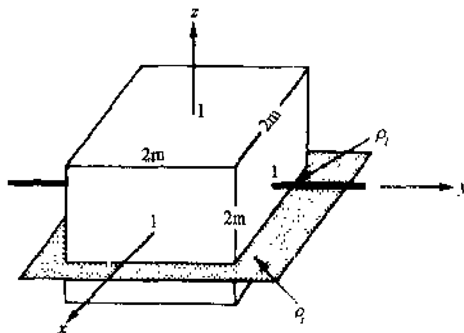


图 3-9

3.5 密度为 $\rho_s=40\ \mu C/m^2$ 的平面电荷位于 $z=-0.5m$，$\rho_l=\ \ 6\mu C/m$ 的均匀线电荷沿 y 轴放置。求穿过如图 3-9 所示的以原点为中心、边长为 2m 的立方体表面的净通量是多大？

■

$$\Psi=Q_{enc}$$

在平面上立方体所包围的电荷是

$$Q=(4m^2)(40\mu C/m^2)=160\mu C$$

在线上立方体所包围的电荷是

$$Q=(2m)(-6\mu C/m)=-12\mu C$$

因而，$Q_{enc}=\Psi=160-12=148\mu C$。

3.6 一点电荷 Q 置于球坐标系的原点处。求穿过由 $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ 所描述的球壳部分的通量(图 3-10)。若 $\alpha=0,\beta=\pi/2$，结果是多少？

■ 通过面积为 $4\pi r^2$ 的完整球壳的总通量为 $\Psi=Q$。题中球壳的面积是

$$A = \int_0^{2\pi}\int_\alpha^\beta r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = 2\pi r^2(\cos\alpha - \cos\beta)$$

所以通过该球壳的通量是

$$\Psi_{net} = \frac{A}{4\pi r^2}Q = \frac{Q}{2}(\cos\alpha - \cos\beta)$$

当 $\alpha = 0$、$\beta = \pi/2$(半球)时，通量成为 $\Psi_{net} = Q/2$。

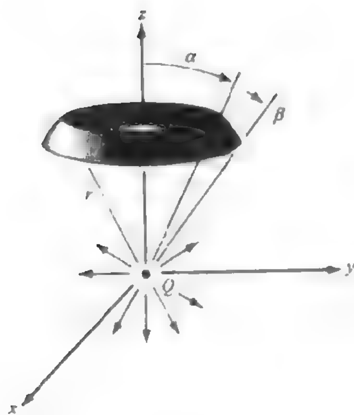


图 3-10

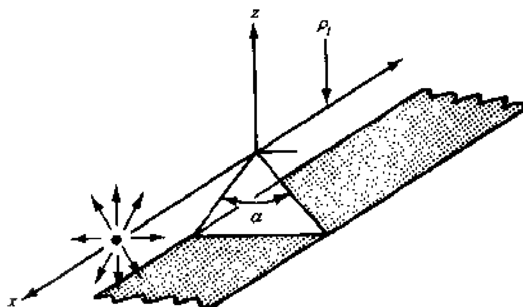


图 3-11

3.7 $\rho_l = 50\mu C/m$ 的均匀线电荷沿 x 轴放置。通过平面 $z = -3m$ 上由 $y = \pm 2m$ 所限定部分的每单位长度的通量 Ψ/L 是多大?

通量在线电荷周围均匀分布，因而穿过该条形区域的通量可以通过所对应的角与 2π 相比得到。在图 3-11 中，因 $\alpha = 2\arctan\left(\frac{2}{3}\right) = 1.176rad$，所以

$$\frac{\Psi}{L} = 50\left(\frac{1.176}{2\pi}\right) = 9.36\ \mu C/m$$

3.8 一点电荷 $Q = 30nC$ 位于笛卡儿坐标系的原点处，求点(1, 3, −4)m 处的电通量密度 **D**。

参见图 3-12，可知

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi R^2}\mathbf{a}_R = \frac{30\times10^{-9}}{4\pi(26)}\left(\frac{\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y - 4\mathbf{a}_z}{\sqrt{26}}\right)$$

$$= (9.18\times10^{-11})\left(\frac{\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y - 4\mathbf{a}_z}{\sqrt{26}}\right) C/m^2$$

进一步简化，得 $D = 91.8\ pC/m^2$。

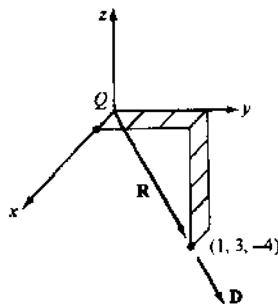


图 3-12

3.9 两个相同的均匀线电荷沿 x 和 y 轴放置，电荷密度为 $\rho_l = 20\mu C/m$。求点(3, 3, 3)m 处的 **D**。

观测点到任一线电荷的距离是 $3\sqrt{2}m$。首先考虑 x 轴上的线电荷，得

$$\mathbf{D}_1 = \frac{\rho_l}{2\pi r_1}\mathbf{a}_{r1} = \frac{20\mu C/m}{2\pi(3\sqrt{2}m)}\left(\frac{\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z}{\sqrt{2}}\right)$$

然后考虑 y 轴上的线电荷，得

$$\mathbf{D}_2 = \frac{\rho_l}{2\pi r_2}\mathbf{a}_{r2} = \frac{20\mu C/m}{2\pi(3\sqrt{2}m)}\left(\frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z}{\sqrt{2}}\right)$$

总通量密度是以上二矢量之和，得

$$\mathbf{D} = \frac{20}{2\pi(3\sqrt{2})}\left(\frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z}{\sqrt{2}}\right) = (2.25)\left(\frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z}{\sqrt{6}}\right)\mu C/m^2$$

3.10 已知 $\mathbf{D} = 10x\mathbf{a}_x(C/m^2)$，一个面积为 $1m^2$ 的区域与 x 轴在 $x = 3m$ 处相交且垂直，确定穿过它的通量。

解答 由于在这个面上 D 是常数且垂直于该面，所以

$$\Psi = DA = (30\text{C/m}^2)(1\text{m}^2) = 30\ \text{C}$$

3.11 若
$$\mathbf{D}=2x\ \mathbf{a}_x+2(1-y)\mathbf{a}_y+4z\ \mathbf{a}_z(\text{C/m}^2)$$
确定穿过圆柱壳表面上 $r=10\text{m}$、$z=2\text{m}$、$\varphi=53.2°$ 处 1mm × 1mm 面积的通量。

解答 在点 P 处(见图 3-13)，因

$$x = 10\cos 53.2° = 6,\quad y = 10\sin 53.2° = 8$$

所以在 P 处，有

$$\mathbf{D} = 12\mathbf{a}_x - 14\mathbf{a}_y + 8\mathbf{a}_z\ \text{C/m}^2$$

在半径为 10m 的圆柱上，1mm^2 的小块面积是有向平面

$$d\mathbf{S} = 10^{-6}(0.6\mathbf{a}_x + 0.8\mathbf{a}_y)\text{m}^2$$

因此
$$d\Psi=\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}=(12\mathbf{a}_x-14\mathbf{a}_y+8\mathbf{a}_z)\cdot 10^{-6}(0.6\mathbf{a}_x+0.8\mathbf{a}_y)=-4.0\ \mu\text{C}$$

负号说明通量是指向 z 轴而不是沿 $d\mathbf{S}$ 方向向外穿过微分面。

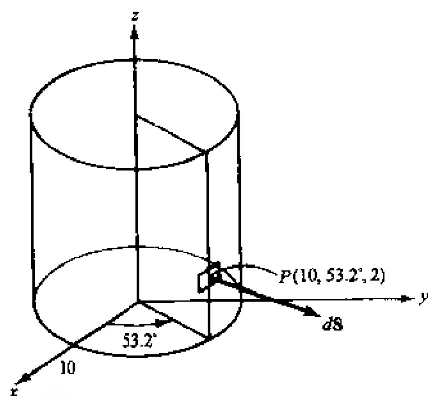


图 3-13

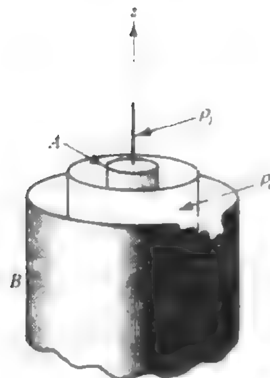


图 3-14

3.12 $\rho_l=3\mu\text{C/m}$ 的均匀线电荷沿 z 轴放置，一半径为 2m 的同轴圆柱面上分布有密度为 $\rho_s=(-1.5/4\pi)\mu\text{C/m}^2$ 的电荷。在分布范围上，它们同 z 轴一样延伸到无限远。试利用高斯定律求各区域的 **D**。

解答 利用图 3-14 中的特殊高斯面 A，采用类似于例 3 的处理方法，可得

$$\mathbf{D} = \frac{\rho_l}{2\pi r}\mathbf{a}_r,\qquad 0<r<2$$

利用特殊高斯面 B，可知

$$Q_{enc} = \oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}$$

$$(\rho_l + 4\pi\rho_s)L = D(2\pi rL)$$

根据上式，得

$$\mathbf{D} = \frac{\rho_l + 4\pi\rho_s}{2\pi r}\mathbf{a}_r,\qquad r>2$$

代入数据，有

$$\mathbf{D} = \begin{cases}\dfrac{0.477}{r}\mathbf{a}_r \quad (\mu\text{C/m}^2), & 0<r<2\ \text{m}\\[2mm] \dfrac{0.239}{r}\mathbf{a}_r \quad (\mu\text{C/m}^2), & r>2\ \text{m}\end{cases}$$

3.13 应用高斯定律说明：均匀带电圆环内部平面上各点处的 **D** 和 **E** 都等于零。

解答 考虑如图 3-15 所示的电荷形态，而不是单个圆环，这里认为无限长均匀带电圆柱面由许多圆环构成。对于高斯面 1，有

$$Q_{enc} = 0 = D\oint dS$$

因此当 $r<R$ 时，$\mathbf{D}=0$。由于 Ψ 完全沿径向分布，所以从带电圆柱面上取一薄片 dz，应用上述所求结

果可知,对于圆环内平面上各点,**D** 和 **E** 都等于零。

3.14 已知圆柱坐标系中有一电荷形态 $\rho=5re^{-2r}$(C/m³),利用高斯定律求 **D**。

解 由于 ρ 不是 φ 和 z 的函数,所以通量 Ψ 完全是径向的。同样,由于 r 为常数,通量密度 **D** 也大小恒定。于是合适的特殊高斯面应是闭合直圆柱表面。由于在上下底面上的积分等于零,所以应用高斯定律可写成

$$Q_{enc}=\int_{侧面}\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\int_0^L\int_0^{2\pi}\int_0^r 5re^{-2r}r\,dr\,d\varphi\,dz=D(2\pi rL)$$

$$5\pi L\left[e^{-2r}\left(-r^2-r-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]=D(2\pi rL)$$

图 3-15

从而有
$$\mathbf{D}=\frac{2.5}{r}\left[\frac{1}{2}-e^{-2r}\left(r^2+r+\frac{1}{2}\right)\right]\mathbf{a}_r\ (\mathrm{C/m^2})$$

3.15 在圆柱坐标系中,$r=2$m 与 $r=4$m 之间的体积内均匀分布着电荷,其密度为 ρ(C/m³)。利用高斯定律求各区域内的 **D**。

解 根据图 3-16,对于 $0<r<2$m,有

$$Q_{enc}=D(2\pi rL),\quad \mathbf{D}=0$$

对于 $2\leqslant r\leqslant 4$m,有

$$\pi\rho L(r^2-4)=D(2\pi rL),\quad \mathbf{D}=\frac{\rho}{2r}(r^2-4)\mathbf{a}_r\quad (\mathrm{C/m^2})$$

对于 $r>4$m,有

$$12\pi\rho L=D(2\pi rL),\qquad \mathbf{D}=\frac{6\rho}{r}\mathbf{a}_r\quad (\mathrm{C/m^2})$$

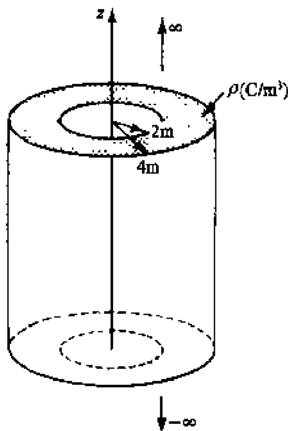


图 3-16

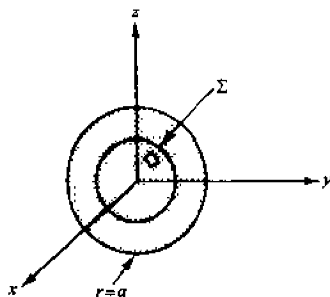


图 3-17

3.16 在球坐标系中,由 $r\leqslant a$ 所描述的体积内电荷均匀分布,其密度为 ρ。利用高斯定律确定 **D**,并将你的结果与题 2.54 中求出的场 **E** 进行比较。当 $r>a$ 时,在原点处放置一个多大的点电荷能产生相同的 **D**?

解 对于图 3-17 中的高斯面 Σ,因

$$Q_{enc}=\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S},\qquad \frac{4}{3}\pi r^3\rho=D(4\pi r^2)$$

于是
$$\mathbf{D}=\frac{\rho r}{3}\mathbf{a}_r,\quad r\leqslant a$$

对于电荷分布区域外的点,因

$$\frac{4}{3}\pi a^3\rho=D(4\pi r^2)$$

所以
$$\mathbf{D}=\frac{\rho a^3}{3r^2}\mathbf{a}_r,\quad r>a$$

若一点电荷 $Q=\frac{4}{3}\pi a^3\rho$ 放在原点处，则当 $r>a$ 时可产生相同的 $\mathbf{D}$。这个点电荷与该体积内包含的总电荷相等。

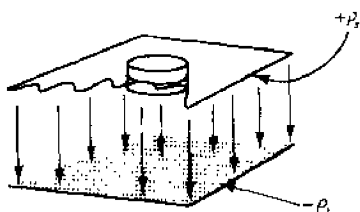


图 3-18

3.17 一平行板电容器，上板的下表面分布有 $+\rho_s$ (C/m²) 的面电荷。下板的上表面分布有 $-\rho_s$ (C/m²) 的面电荷。忽略边缘效应，利用高斯定律求出两板之间区域内的 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{E}$。

解 所有的通量都从上板的正电荷出发止于下板的负电荷。忽略边缘效应，所有通量都与上、下板垂直。对于如图 3-18 所示的特殊高斯面，因

$$Q_{enc}=\int_{上表面}\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}+\int_{下表面}\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}+\int_{侧面}\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}$$
$$=0+\int_{下表面}\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}+0$$

或者
$$\rho_s A = D\int dS = DA$$

其中 A 表示面积。所以

$$\mathbf{D}=\rho_s\mathbf{a}_n\,(\mathrm{C/m^2}),\quad \mathbf{E}=\frac{\rho_s}{\epsilon_0}\mathbf{a}_n\,(\mathrm{V/m})$$

两者均由正电荷板指向负电荷板。

补 充 习 题

3.18 边长为 2m 的正方体内充满着电荷密度为

$$\rho=50x^2\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)\ (\mu\mathrm{C/m^3})$$

的电荷，正方体的边与坐标轴平行，几何中心在原点，求它所包围的净电荷。

答案：84.9μC

3.19 已知电荷密度 $\rho=2z\sin^2\varphi$ (C/m³)，求 $1\leqslant r\leqslant 3\mathrm{m}$、$0\leqslant\varphi\leqslant\pi/3$、$0\leqslant z\leqslant 2\mathrm{m}$ 体积内所包围的电荷。

答案：4.91C

3.20 已知球坐标系中电荷密度

$$\rho=\frac{\rho_0}{(r/r_0)^2}e^{-r/r_0}\cos^2\varphi$$

试分别求出半径为 $r=r_0$、$r=5r_0$、$r=\infty$ 的球体内所包围的电荷量。

答案：$3.97\rho_0 r_0^3$，$6.24\rho_0 r_0^3$，$6.28\rho_0 r_0^3$

3.21 闭合曲面 S 包含一有限长线电荷，$0\leqslant l\leqslant\pi$ m，电荷密度为

$$\rho_l=-\rho_0\sin\frac{l}{2}\ (\mathrm{C/m})$$

穿过曲面 S 的净通量是多大？

答案：$-2\rho_0$C

3.22 在半径 $r\leqslant 2\mathrm{m}$ 的球域内分布有电荷，密度为

$$\rho=\frac{-200}{r^2}\ (\mu\mathrm{C/m^3})$$

穿过 $r=1\mathrm{m}$，$r=4\mathrm{m}$，$r=500\mathrm{m}$ 的球面的净通量分别是多大？

答案：$-800\pi\mu$C，$-1600\pi\mu$C，$-1600\pi\mu$C

3.23 球坐标系原点处有一点电荷 Q，在 $r=a$ 处有一球面，球面上均匀分布着总量为 $Q'-Q$ 的电荷。当 $k<a$ 和 $k>a$ 时穿过球面 $r=k$ 的通量分别是多大？

答案：Q，Q'

3.24　一均匀线电荷沿 x 轴放置，$\rho_l = 3\ \mu C/m$。穿过以原点为球心、半径为 $r = 3m$ 的球面的通量是多大？

答案：$18\mu C$

3.25　若点电荷 Q 位于原点，求穿过以原点为球心、$\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$ 的球面的通量表达式。

答案：$\frac{\beta-\alpha}{2\pi}Q$

3.26　一点电荷 Q (C)位于球坐标系的原点。求穿过半径为 3m 的同心球壳上 $4\pi\ m^2$ 面积的通量 Ψ。

答案：$Q/9$ C

3.27　穿过半径为 4m 的球壳表面上 $40.2m^2$ 面积的通量为 $10\mu C$，方向指向球壳内部。在原点处需要多大的点电荷？

答案：$-50\mu C$

3.28　一均匀分布线电荷 ρ_l 沿 x 轴放置。由线电荷产生的通量有百分之几通过 $y = 6$、$-1 \leqslant z \leqslant 1$ 所限定的带形区域？

答案：5.26%

3.29　一点电荷 $Q = 3nC$ 放置在笛卡儿坐标系的原点处。穿过平面 $z = 2m$ 上 $-4 \leqslant x \leqslant 4m$、$-4 \leqslant y \leqslant 4m$ 区域的通量是多大？

答案：0.5nC

3.30　$\rho_l = 5\mu C/m$ 的均匀线电荷沿 x 轴放置，求点(3,2,1)m 处的 $\mathbf{D}$。

答案：$(0.356)\left(\frac{2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z}{\sqrt{5}}\right)\mu C/m^2$

3.31　一点电荷 $+Q$ 置于球坐标系的原点处，在包围 $+Q$ 的 $r = a$ 的同心球壳上均匀分布着电荷，总电量为 $-Q$。求当 $r < a$ 和 $r > a$ 时穿过球面的通量 Ψ，并求各区域的 D。

答案：$\Psi = 4\pi r^2 D = \begin{cases} +Q, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}$

3.32　已知 $\mathbf{D} = 500e^{-0.1x}\mathbf{a}_x(\mu C/m^2)$，一面积为 $1m^2$ 的曲面分别位于 $x = 1m$, $x = 5m$, $x = 10m$，且与 x 轴垂直，求穿过这些曲面的通量 Ψ。

答案：$452\mu C$, $303\mu C$, $184\mu C$

3.33　已知 $\mathbf{D} = 5x^2\mathbf{a}_x + 10z\mathbf{a}_z(C/m^2)$，一立方体边长为 2m，中心在原点，求穿过立方体表面向外的净通量。立方体的各边与坐标轴平行。

答案：80C

3.34　在圆柱坐标系中，已知

$$\mathbf{D} = 30e^{-r/b}\mathbf{a}_r - 2\frac{z}{b}\mathbf{a}_z(C/m^2)$$

求穿过由 $r = 2b$、$z = 0$、$z = 5b$ (m)所描述的直圆柱体向外的通量。

答案：$129b^2$ C

3.35　在圆柱坐标系中，已知

$$\mathbf{D} = 2r\cos\varphi\ \mathbf{a}_\varphi - \frac{\sin\varphi}{3r}\ \mathbf{a}_z$$

求穿过平面 $z = 0$ 由 $r \leqslant a$、$0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$ 所限定的区域的通量。当 $3\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ 时重求通量。假定与 $\mathbf{a}_z$ 同向时通量为正。

答案：$-\frac{a}{3}$, $\frac{a}{3}$

3.36　在圆柱坐标系中，$r \leqslant a$、$z = 0$ 的圆盘上分布着非均匀密度为 $\rho_s(r,\varphi)$ 的电荷，使用适当的特殊高斯面分别求两种情况下 z 轴上 D 的近似值：(a)非常靠近圆盘($0 < z \ll a$)，(b)远离圆盘($z \gg a$)。

答案：(a) $\frac{\rho_s(0,\varphi)}{2}$；(b) $\frac{Q}{4\pi z^2}$　$\left(其中\ Q = \int_0^{2\pi}\int_0^a \rho_s(r,\varphi)r dr d\varphi\right)$

3.37　一点电荷 $Q = 2000pC$ 置于球坐标系的原点处。在 $r = 1m$ 的同心球面上分布着电荷，电荷密度为 $\rho_s = 40\pi\ pC/m^2$。在 $r = 2m$ 的同心球面上需要多大的面电荷密度才能使 $r > 2m$ 时 $\mathbf{D} = 0$？

答案：$-71.2pC/m^2$

3.38　已知球坐标系中电荷分布的密度为 $\rho = 5r\ (C/m^3)$，试利用高斯定律求 $\mathbf{D}$。

答案：$(5r^2/4)\ \mathbf{a}_r(C/m^2)$

3.39 在 $2\leqslant x\leqslant 4\text{m}$ 的区域内均匀分布有密度为 $2\ \text{C/m}^3$ 的电荷(笛卡儿坐标系),试利用高斯定律求各区域的 $\mathbf{D}$。

答案:$-2\mathbf{a}_x\ \text{C/m}^2$, $2(x-3)\mathbf{a}_x\ \text{C/m}^2$, $2\mathbf{a}_x\ \text{C/m}^2$

3.40 利用高斯定律求圆柱形电容器的同轴圆柱导体面间区域内的 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{E}$,内圆柱半径为 a。忽略边缘效应。

答案:$\rho_{sa}(a/r)$, $\rho_{sa}(a/\varepsilon_0 r)$

3.41 厚度一定的导体上分布着密度为 ρ_s 的面电荷。假定导体内 $\Psi=0$,通过构造一小的特殊高斯面说明在导体外侧 $D=\pm\rho_s$。

第4章 散度和散度定理

4.1 散度

空间中矢量场各点的变化情况可用两个量来描述。第一个是**散度**,它是标量,与函数导数类似,将在本章中对它进行分析;第二个是**旋度**,它是矢量,将在第9章中讨论。

当矢量场的散度是非零时,我们说此区域包含源或洞,当散度是正值时为源,负值时为洞。在静电场中,正散度、正源和正电荷 Q 是一致的。根据定义,电通量 Ψ 起始于正电荷。因此,包含正电荷的区域就包含了 Ψ 的源。在这个区域内,电通量密度 $\mathbf{D}$ 的散度将是正的。负散度、洞和负电荷之间存在相似的一致关系。

在点 P 处矢量场 $\mathbf{A}$ 的散度定义为

$$\operatorname{div}\mathbf{A} \equiv \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v}$$

式中的面积分区域是收缩于点 P 的无穷小体积 Δv 的整个表面。

4.2 笛卡儿坐标系中的散度

在任何坐标系中,对任意矢量场都可以写出散度。为了便于在笛卡儿坐标系中推导,选择一个立方体,其边 Δx、Δy 和 Δz 分别平行于 x、y 和 z 轴,如图4-1所示。然后在点 P 即坐标 x、y 和 z 具有最小值的立方体顶点上定义矢量场 $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$$

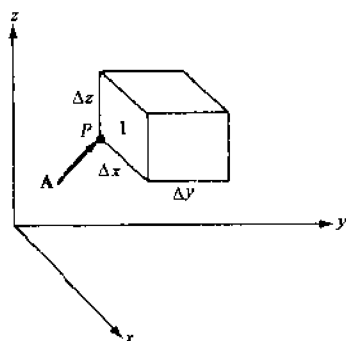


图4-1

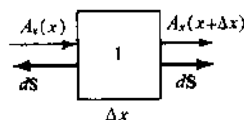


图4-2

为了求出积分 $\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$,必须涉及所有六个侧面。在每个侧面上,$d\mathbf{S}$ 的方向总是向外的。由于侧面分别垂直于三个坐标轴,所以 $\mathbf{A}$ 的每个分量都要穿过两个平行侧面。

在图4-2中,我们把立方体转向,以便完全观察到侧面1。$\mathbf{A}$ 的 x 分量穿过1的左侧面和右侧面。由于面积很小,积分

$$\int_{\text{左面}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \approx -A_x(x)\Delta y \Delta z$$

$$\int_{\text{右面}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \approx A_x(x+\Delta x)\Delta y \Delta z \approx \left[A_x(x) + \frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta x\right]\Delta y \Delta z$$

因此两个面的总和为

$$\frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z$$

对剩余的两对侧面实施相同的步骤,并把所有结果合并,可得

$$\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}\approx\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z$$

两端同除以 $\Delta x\Delta y\Delta z=\Delta v$,并令 $\Delta v\to 0$,得

$$\mathrm{div}\mathbf{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\quad(\text{笛卡儿坐标})$$

用同样的方法可求出圆柱坐标(习题 4.1)和球坐标的散度表达式:

$$\mathrm{div}\mathbf{A}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\quad(\text{圆柱坐标})$$

$$\mathrm{div}\mathbf{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\quad(\text{球坐标})$$

例 1　已知矢量场 $\mathbf{A}=5x^2\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\mathbf{a}_x$,求 $x=1$ 处的 $\mathrm{div}\mathbf{A}$。

解　$\mathrm{div}\mathbf{A}=\frac{\partial}{\partial x}\left(5x^2\sin\frac{\pi x}{2}\right)=5x^2\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)\frac{\pi}{2}+10x\sin\frac{\pi x}{2}=\frac{5}{2}\pi x^2\cos\frac{\pi x}{2}+10x\sin\frac{\pi x}{2}$

于是　$$\mathrm{div}\mathbf{A}\big|_{x=1}=10$$

例 2　在圆柱坐标系中,矢量场由 $\mathbf{A}=r\sin\varphi\ \mathbf{a}_r+r^2\cos\varphi\ \mathbf{a}_\varphi+2re^{-5z}\ \mathbf{a}_z$ 给出。求点$(1/2,\pi/2,0)$处的 $\mathrm{div}\ \mathbf{A}$。

解　$\mathrm{div}\mathbf{A}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\varphi)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(r^2\cos\varphi)+\frac{\partial}{\partial z}(2re^{-5z})=2\sin\varphi-r\sin\varphi-10re^{-5z}$

于是　$$\mathrm{div}\mathbf{A}\big|_{(1/2,\pi/2,0)}=2\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}-10\left(\frac{1}{2}\right)e^0=-\frac{7}{2}$$

例 3　在球坐标系中,矢量场由 $\mathbf{A}=(5/r^2)\sin\theta\ \mathbf{a}_r+r\cot\theta\ \mathbf{a}_\theta+r\sin\theta\cos\varphi\mathbf{a}_\varphi$给出。求$\mathrm{div}\ \mathbf{A}$。

解　$\mathrm{div}\mathbf{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(5\sin\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta\cot\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(r\sin\theta\cos\varphi)=-1-\sin\varphi$

4.3　D 的散度

根据高斯定律(3.3 节),可写出

$$\frac{\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}}{\Delta v}=\frac{Q_{enc}}{\Delta v}$$

在极限情况下,上式成为

$$\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}}{\Delta v}=\mathrm{div}\ \mathbf{D}=\lim_{\Delta v\to 0}\frac{Q_{enc}}{\Delta v}=\rho$$

这个重要结果正是麦克斯韦方程组在静电场中的一个方程:

$$\mathrm{div}\mathbf{D}=\rho,\qquad \mathrm{div}\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}$$

如果在所考察的区域中 ε 是常数,则上式成立;反之,则变为 $\mathrm{div}\varepsilon\mathbf{E}=\rho$。因此,在任何不存在电荷的各向同性区域中,场 **E** 和场 **D** 的散度均为零。

例 4　在球坐标系中,区域 $r\leqslant a$ 有均匀电荷密度ρ;对于区域 $r>a$,电荷密度为零。由习题 2.54 可知,$\mathbf{E}=E_r\mathbf{a}_r$。当 $r\leqslant a$ 时,$E_r=(\rho r/3\varepsilon_0)$;当 $r>a$ 时,$E_r=(\rho a^3/3\varepsilon_0 r^2)$。于是,对于$r\leqslant a$,有

$$\mathrm{div}\mathbf{E}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(3r^2\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\right)=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

而对于 $r>a$,有

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\right)=0$$

4.4 ∇算子

矢量分析有它独特的简写形式,读者应注意这些简写。在**笛卡儿坐标系**中定义一个矢量算子,用符号∇表示

$$\nabla\equiv\frac{\partial(\ \ )}{\partial x}\mathbf{a}_x+\frac{\partial(\ \ )}{\partial y}\mathbf{a}_y+\frac{\partial(\ \ )}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

在微积分学中,微分运算符 D 有时用来表示d/dx。符号$\sqrt{\ }$ 和$\int$也是运算符,单独放置没有指明要运算什么时,它们是没有意义的。∇也一样,单独放置时仅表明取偏微分,每一偏微分后跟随一个单位矢量。然而,当∇点乘矢量 **A** 时,结果就成了 **A** 的散度:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{A}&=\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}_x+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a}_y+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}_z\right)\cdot(A_x\mathbf{a}_x+A_y\mathbf{a}_y+A_z\mathbf{a}_z)\\&=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=\operatorname{div}\mathbf{A}\end{aligned}$$

以后,矢量场的散度将写成$\nabla\cdot\mathbf{A}$。

注意:上述∇算子的定义仅适用于笛卡儿坐标系。在其他坐标系中,**A** 的散度写成$\nabla\cdot\mathbf{A}$并不意味着∇算子在这些坐标系中有意义。例如,圆柱坐标系中散度表达式为(见4.2节)

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

这并不意味着在圆柱坐标系中,下式:

$$\nabla=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\ \ )\mathbf{a}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial(\ \ )}{\partial\varphi}\mathbf{a}_\varphi+\frac{\partial(\ \ )}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

成立。事实上,当此式用于∇V(梯度,第5章)或$\nabla\times\mathbf{A}$(旋度,第9章)时将会得出错误的结果。

4.5 散度定理

高斯定律表明 $\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}$ 的闭合面积分等于闭合面所包围的电荷。如果整个区域内电荷密度函数 ρ 已知,那么闭合面所包围的电荷可以对 ρ 在整个区域内积分获得,即

$$\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}=\int\rho dv=Q_{enc}$$

而 $\rho=\nabla\cdot\mathbf{D}$,因此

$$\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}=\int(\nabla\cdot\mathbf{D})dv$$

这就是**散度定理**,也被称为**高斯散度定理**,它是平面上的格林定理在三维区域上的推广。另一方面,该定理是从 **D**、Q 和 ρ 满足的已知关系中得出的,它对任意具有足够对称性的矢量场都适用。

$$\text{散度定理}\qquad\oint_S\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}=\int_v(\nabla\cdot\mathbf{A})dv$$

式中,体积 v 是被曲面S 所包围的那部分体积。

例5 在球坐标系中,区域 $r\leqslant a$ 中的电场强度为

$$\mathbf{E}=\frac{\rho r}{3\varepsilon}\mathbf{a}_r$$

对这个矢量场验证散度定理的等式两边。对于曲面 S,选择球面 $r=b\leqslant a$。

解

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} \qquad\qquad \oint(\nabla\cdot\mathbf{E})dv$$

$$\iint\left(\frac{\rho b}{3\varepsilon}\mathbf{a}_r\right)\cdot(b^2\sin\theta d\theta d\varphi\mathbf{a}_r) \qquad \nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\rho r}{3\varepsilon}\right)=\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\rho b^3}{3\varepsilon}\sin\theta d\theta d\varphi \qquad \text{于是}\quad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{b}\frac{\rho}{\varepsilon}r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$=\frac{4\pi\rho b^3}{3\varepsilon} \qquad\qquad =\frac{4\pi\rho b^3}{3\varepsilon}$$

在任何坐标系中，散度定理不仅适用于静态场还适用于时变场。它常用于把闭合面积分转化为体积分的求解运算中，也可以用来把一个能够表达成矢量场散度的体积分转化成闭合面积分。

习 题 求 解

4.1 推导圆柱坐标系中的散度表达式。

一个边为 Δr、$r\Delta\varphi$ 和 Δz 的小区域如图 4-3 所示。在点 P 处，即坐标 r、φ 和 z 具有最小值的顶点上定义矢量场 $\mathbf{A}$ 为

$$\mathbf{A}=A_r\mathbf{a}_r+A_\varphi\mathbf{a}_\varphi+A_z\mathbf{a}_z$$

根据定义，散度

$$\mathrm{div}\mathbf{A}=\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\oint\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} \tag{1}$$

为了求出积分 $\oint\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$，必须涉及区域的所有六个侧面。对于 $\mathbf{A}$ 的径向分量，可参考图 4-4。

在整个左侧面上，有

$$\int\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}\approx -A_r r\Delta\varphi\Delta z$$

在整个右侧面上，有

$$\begin{aligned}\int\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}&\approx A_r(r+\Delta r)(r-\Delta r)\Delta\varphi\Delta z\\&\approx\left(A_r+\frac{\partial A_r}{\partial r}\Delta r\right)(r+\Delta r)\Delta\varphi\Delta z\\&\approx A_r r\Delta\varphi\Delta z+\left(A_r+r\frac{\partial A_r}{\partial r}\right)\Delta r\Delta\varphi\Delta z\end{aligned}$$

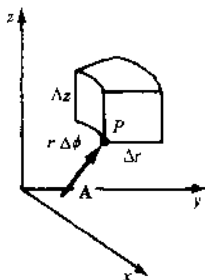


图 4-3

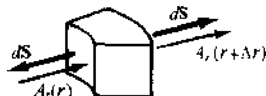


图 4-4

上式中包含 $(\Delta r)^2$ 的项被略去了。由于 $\Delta v=r\Delta r\Delta\varphi\Delta z$，所以这一对侧面的净贡献为

$$\left(A_r+r\frac{\partial A_r}{\partial r}\right)\Delta r\Delta\varphi\Delta z=\frac{\partial}{\partial r}(rA_r)\Delta r\Delta\varphi\Delta z=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r)\Delta v \tag{2}$$

类似地，由垂直于 $\mathbf{a}_\varphi$ 的侧面可得

$$-A_\varphi\Delta r\Delta z \quad\text{和}\quad \left(A_\varphi+\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\Delta\varphi\right)\Delta r\Delta z$$

从而得到净贡献

$$\frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\Delta v \tag{3}$$

进一步，由垂直于 $\mathbf{a}_z$ 的侧面可得

$$-A_z r\Delta r\Delta\varphi \quad 和 \quad \left(A_z+\frac{\partial A_z}{\partial z}\Delta z\right)r\Delta r\Delta\varphi$$

从而得到净贡献

$$\frac{\partial A_z}{\partial z}\Delta v \tag{4}$$

合并式(2)，(3) 和(4) 得出$\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$，式(1) 成为

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

4.2 对均匀长直线电荷的电场，验证 $\nabla\cdot\mathbf{E}$ 为零。

在圆柱坐标系中，长直线电荷产生的场为

$$\mathbf{E}=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathbf{a}_r$$

所以

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}\right)=0$$

电荷的这种分布形态使 $\mathbf{E}$ 的散度除了在 $r=0$ 处不确定外，其余处处为零。

4.3 试说明由点电荷产生的场 $\mathbf{D}$ 的散度为零。

在球坐标系中，点电荷产生的场为

$$\mathbf{D}=\frac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{a}_r$$

因此，对于 $r>0$，有

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{Q}{4\pi r^2}\right)=0$$

4.4 已知 $\mathbf{A}=e^{-y}(\cos x\ \mathbf{a}_x-\sin x\ \mathbf{a}_y)$，求 $\nabla\cdot\mathbf{A}$。

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{\partial}{\partial x}(e^{-y}\cos x)+\frac{\partial}{\partial y}(-e^{-y}\sin x)=e^{-y}(-\sin x)+e^{-y}(\sin x)=0$$

4.5 已知 $\mathbf{A}=x^2\ \mathbf{a}_x+yz\ \mathbf{a}_y+xy\ \mathbf{a}_z$，求 $\nabla\cdot\mathbf{A}$。

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2)+\frac{\partial}{\partial y}(yz)+\frac{\partial}{\partial z}(xy)=2x+z$$

4.6 已知 $\mathbf{A}=(x^2+y^2)^{-1/2}\ \mathbf{a}_x$，求点(2,2,0)处的 $\nabla\cdot\mathbf{A}$。

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=-\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-2/3}(2x)$$

于是

$$\nabla\cdot\mathbf{A}_{(2,2,0)}=-8.84\times10^{-2}$$

4.7 已知 $\mathbf{A}=r\sin\varphi\ \mathbf{a}_r+2r\cos\varphi\ \mathbf{a}_\varphi+2z^2\ \mathbf{a}_z$，求 $\nabla\cdot\mathbf{A}$。

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\varphi)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(2r\cos\varphi)+\frac{\partial}{\partial z}(2z^2)$$
$$=2\sin\varphi-2\sin\varphi+4z-4z$$

4.8 已知 $\mathbf{A}=10\sin^2\varphi\ \mathbf{a}_r+r\ \mathbf{a}_\varphi+[(z^2/r)\cos^2\varphi]\ \mathbf{a}_z$，求点$(2,\varphi,5)$处的 $\nabla\cdot\mathbf{A}$。

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{10\sin^2\varphi+2z\cos^2\varphi}{r}$$

于是

$$\nabla\cdot\mathbf{A}_{(2,\varphi,5)}=5$$

4.9 已知 $\mathbf{A}=(5/r^2)\mathbf{a}_r+(10/\sin\theta)\ \mathbf{a}_\theta-r^2\varphi\ \sin\theta\ \mathbf{a}_\varphi$，求 $\nabla\cdot\mathbf{A}$。

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(5)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(10)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(-r^2\varphi\ \sin\varphi)=-r$$

4.10　已知 $\mathbf{A}=5\sin\theta\mathbf{a}_\theta+5\sin\theta\mathbf{a}_\varphi$，求点$(0.5,\pi/4,\pi/4)$处的$\nabla\cdot\mathbf{A}$。



$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(5\sin^2\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(5\sin\varphi)$$

$$=10\frac{\cos\theta}{r}+5\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}$$

于是

$$\nabla\cdot\mathbf{A}\mid_{(0.5,\pi/4,\pi/4)}=24.14$$

4.11　在笛卡儿坐标系中，已知区域 $-1\leqslant z\leqslant1$ 中 $\mathbf{D}=\rho_0z\mathbf{a}_z$，而在其他区域中 $\mathbf{D}=(\rho_0z/|z|)\mathbf{a}_z$。求电荷密度。



$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$$

对于 $-1\leqslant z\leqslant1$，有

$$\rho=\frac{\partial}{\partial z}(\rho_0z)=\rho_0$$

而对于 $z<-1$ 或 $z>1$，有

$$\rho=\frac{\partial}{\partial z}(\mp\rho_0)=0$$

电荷分布如图 4-5 所示。

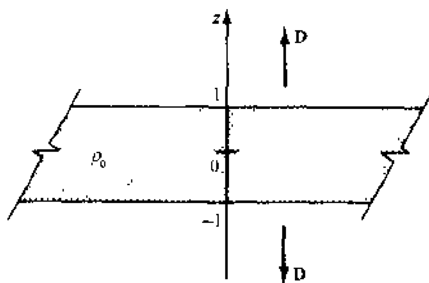


图 4-5

4.12　在圆柱坐标系中，已知区域 $0<r\leqslant3\text{m}$ 中，$\mathbf{D}=(10r^3/4)\mathbf{a}_r\,(\text{C/m}^2)$；而在其他区域中，$\mathbf{D}=(810/4r)\mathbf{a}_r\,(\text{C/m}^2)$。求电荷密度。



对于 $0<r\leqslant3\text{m}$，可得

$$\rho=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{10r^4}{4}\right)=10r^2\,(\text{C/m}^3)$$

对于 $r>3\text{m}$，可得

$$\rho=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(810/4)=0$$

4.13　在球坐标系中，已知

$$\mathbf{D}=\frac{Q}{\pi r^2}(1-\cos3r)\mathbf{a}_r$$

求电荷密度。



$$\rho=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{Q}{\pi r^2}(1-\cos3r)\right]=\frac{3Q}{\pi r^2}\sin3r$$

4.14　在球坐标系的区域 $0<r\leqslant1\text{m}$ 中，$\mathbf{D}=(-2\times10^{-4}/r)\mathbf{a}_r\,(\text{C/m}^2)$；区域 $r>1\text{m}$ 中，$\mathbf{D}=(-4\times10^{-4}/r^2)\mathbf{a}_r\,(\text{C/m})$。求这两个区域的电荷密度。



对于 $0<r\leqslant1\text{m}$，有

$$\rho=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(-2\times10^{-4}r)=\frac{-2\times10^{-4}}{r^2}\,(\text{C/m}^3)$$

对于 $r>1\text{m}$，有

$$\rho=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(-4\times10^{-4})=0$$

4.15　在球坐标系的区域 $r\leqslant2$ 中 $\mathbf{D}=(5r^2/4)\mathbf{a}_r$，而在区域 $r>2$ 中 $\mathbf{D}=(20/r^2)\mathbf{a}_r$。求电荷密度。



对于 $r\leqslant2$，得

$$\rho=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(5r^4/4)=5r$$

对于 $r>2$，得

$$\rho = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(20) = 0$$

4.16 已知 $\mathbf{D}=(10x^3/3)\mathbf{a}_x\,(\mathrm{C/m^2})$，对以坐标原点为中心、边长为 2m、各边平行于坐标轴的立方体，求散度定理等式两边的值。



$$\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \int_v (\nabla\cdot\mathbf{D})dv$$

由于 $\mathbf{D}$ 只有 x 分量，$\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}$ 除了在面 $x=1\mathrm{m}$ 和 $x=-1\mathrm{m}$ 上有不等于零的值外，其余为零（见图 4-6），从而

$$\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{10(1)}{3}\mathbf{a}_x\cdot dydz\,\mathbf{a}_x + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{10(-1)}{3}\mathbf{a}_x\cdot dydz(-\mathbf{a}_x)$$

$$= \frac{40}{3}+\frac{40}{3} = \frac{80}{3}\quad\mathrm{C}$$

而对于散度定理等式的右边，由于 $\nabla\cdot\mathbf{D}=10x^2$，所以

$$\int_v(\nabla\cdot\mathbf{D})dv = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(10x^2)dxdydz = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[10\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}dydz = \frac{80}{3}\quad\mathrm{C}$$

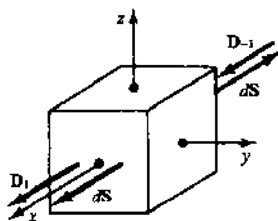


图 4-6

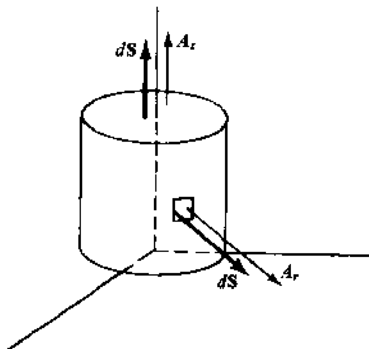


图 4-7

4.17 在圆柱坐标系中，已知 $\mathbf{A}=30e^{-r}\mathbf{a}_r-2z\mathbf{a}_z$，对于由 $r=2$、$z=0$ 和 $z=5$ 所包围的体积（图 4-7），求散度定理等式两边的值。



$$\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \int(\nabla\cdot\mathbf{A})dv$$

注意到当 $z=0$ 时 $A_z=0$，所以在这部分表面上 $\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$ 为零。这样

$$\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \int_0^5\int_0^{2\pi}30e^{-2}\mathbf{a}_r\cdot 2d\varphi dz\,\mathbf{a}_r + \int_0^{2\pi}\int_0^2 -2(5)\,\mathbf{a}_z\cdot rdrd\varphi\,\mathbf{a}_z$$

$$= 60e^{-2}(2\pi)(5) - 10(2\pi)(2) = 129.4$$

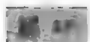
对于散度定理等式的右边：

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(30re^{-r}) + \frac{\partial}{\partial z}(-2z) = \frac{30e^{-r}}{r} - 30e^{-r} - 2$$

于是

$$\int(\nabla\cdot\mathbf{A})dv = \int_0^5\int_0^{2\pi}\int_0^2\left(\frac{30e^{-r}}{r} - 30e^{-r} - 2\right)rdrd\varphi dz = 129.4$$

4.18 在圆柱坐标系中，已知 $\mathbf{D}=(10r^3/4)\,\mathbf{a}_r\,(\mathrm{C/m^2})$，对于由 $r=1\mathrm{m}$、$r=2\mathrm{m}$、$z=0$ 和 $z=10\mathrm{m}$ 所包围的体积（见图 4-8），求散度定理等式两边的值。



$$\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \int(\nabla\cdot\mathbf{D})dv$$

由于 $\mathbf{D}$ 没有 z 分量，所以上底面和下底面的 $\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}$ 为零。在内柱面上，$d\mathbf{S}$ 沿着 $-\mathbf{a}_r$ 的方向。闭合面积分为

$$\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \int_0^{10}\int_0^{2\pi}\frac{10}{4}(1)^3\mathbf{a}_r\cdot(1)d\varphi dz(-\mathbf{a}_r)$$

$$+\int_0^{10}\int_0^{2\pi}\frac{10}{4}(2)^3\mathbf{a}_r\cdot(2)d\varphi dz\,\mathbf{a}_r$$

$$= \frac{-200\pi}{4} - 16\frac{200\pi}{4} = 750\pi \text{ C}$$

对于散度定理等式的右边：

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{10r^4}{4}\right) = 10r^2$$

于是
$$\int(\nabla \cdot \mathbf{D})dv = \int_0^{10}\int_0^{2\pi}\int_1^2 (10r^2)rdrd\varphi dz = 750\pi \text{ C}$$

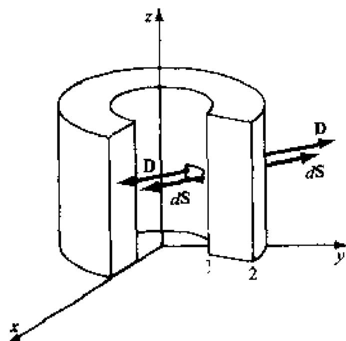


图 4-8

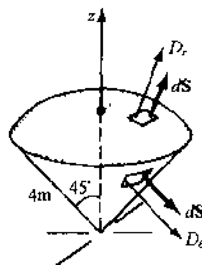


图 4-9

4.19 在球坐标系中，已知 $\mathbf{D} = (5r^2/4)\mathbf{a}_r$ (C/m²)，对由 $r = 4$m 和 $\theta = \pi/4$ 所包围的体积(见图 4-9)，求散度定理等式两边的值。



$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int(\nabla \cdot \mathbf{D})dv$$

由于 D 只有径向分量，所以 $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ 只在面 $r = 4$m 上有非零值。这样

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} \frac{5(4)^2}{4}\mathbf{a}_r \cdot (4)^2 \sin\theta d\theta d\varphi\, \mathbf{a}_r = 589.1\text{C}$$

对于散度定理等式的右边：

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{5r^4}{4}\right) = 5r$$

于是
$$\int(\nabla \cdot \mathbf{D})dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^4 (5r)r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi = 581.9 \text{ C}$$

补 充 习 题

4.20 在球坐标系中，使用边为 Δr、$r\Delta\theta$ 和 $r\sin\theta\Delta\varphi$ 的小区域推导散度表达式。

4.21 试说明对于均匀面电荷产生的电场，$\nabla \cdot \mathbf{E}$ 为零。

4.22 电荷在 z 轴 $\pm d/2$ 处的电偶极子的电场是

$$\mathbf{E} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3}(2\cos\theta\mathbf{a}_r + \sin\theta\mathbf{a}_\theta)$$

试说明此场的散度为零。

4.23 已知 $\mathbf{A} = e^{5x}\mathbf{a}_x + 2\cos y\,\mathbf{a}_y + 2\sin z\,\mathbf{a}_z$，求原点处的 $\nabla \cdot \mathbf{A}$。

答案：7.0

4.24 已知 $\mathbf{A} = (3x + y^2)\mathbf{a}_x + (x - y^2)\mathbf{a}_y$，求 $\nabla \cdot \mathbf{A}$。

答案：$3 - 2y$

4.25 已知 $\mathbf{A} = 2xy\,\mathbf{a}_x + 2\,\mathbf{a}_y + yz^2\,\mathbf{a}_z$，求点 $(2, -1, 3)$ 处的 $\nabla \cdot \mathbf{A}$。

答案：-8.0

4.26 已知 $\mathbf{A} = 4xy\,\mathbf{a}_x - xy^2\,\mathbf{a}_y + 5\sin z\,\mathbf{a}_z$，求点 $(2,2,0)$ 处的 $\nabla \cdot \mathbf{A}$。

答案：5.0

4.27 已知 $\mathbf{A} = 2r\cos^2\varphi\,\mathbf{a}_r + 3r^2\sin z\,\mathbf{a}_\varphi + 4z\sin^2\varphi\,\mathbf{a}_z$，求 $\nabla \cdot \mathbf{A}$。

答案:4.0

4.28　已知 $\mathbf{A}=(10/r^2)\ \mathbf{a}_r+5e^{-2z}\ \mathbf{a}_z$,求点$(2,\varphi,1)$处的$\nabla\cdot\mathbf{A}$。

答案:2.60

4.29　已知 $\mathbf{A}=5\cos r\ \mathbf{a}_r+(3ze^{-2r}/r)\ \mathbf{a}_z$,求点$(\pi,\varphi,z)$处的$\nabla\cdot\mathbf{A}$。

答案:　1.59

4.30　已知 $\mathbf{A}=10\ \mathbf{a}_r+5\sin\theta\ \mathbf{a}_\theta$,求$\nabla\cdot\mathbf{A}$。

答案:$(2+\cos\theta)(10/r)$

4.31　已知 $\mathbf{A}=r\ \mathbf{a}_r-r^2\cot\theta\ \mathbf{a}_\theta$,求$\nabla\cdot\mathbf{A}$。

答案:$3-r$

4.32　已知 $\mathbf{A}=[(10\sin^2\theta)/r]\ \mathbf{a}_r$(N/m),求点(2m, $\pi/4$ rad, $\pi/2$ rad)处的$\nabla\cdot\mathbf{A}$。

答案:1.25 N/m^2

4.33　已知 $\mathbf{A}=r^2\sin\theta\ \mathbf{a}_r+13\varphi\ \mathbf{a}_\theta+2r\ \mathbf{a}_\varphi$,求$\nabla\cdot\mathbf{A}$。

答案:$4r\sin\theta+\left(\dfrac{13\varphi}{r}\right)\cot\theta$

4.34　如果 $\mathbf{E}=(100/r)\mathbf{a}_\varphi+40\mathbf{a}_z$,试说明 $\mathbf{E}$ 的散度是零。

4.35　在区域 $a\leqslant r\leqslant b$(圆柱坐标)中,场

$$\mathbf{D}=\rho_0\left(\frac{r^2-a^2}{2r}\right)\mathbf{a}_r$$

在区域 $r>b$ 中,场

$$\mathbf{D}=\rho_0\left(\frac{b^2-a^2}{2r}\right)\mathbf{a}_r$$

而对于区域 $r<a$, $\mathbf{D}=\mathbf{0}$。分别求三个区域中的 ρ。

答案:$0,\rho_0,0$

4.36　在区域 $0<r\leqslant2$(圆柱坐标)中,$\mathbf{D}=(4r^{-1}+2e^{-0.5r}+4r^{-1}e^{-0.5r})\mathbf{a}_r$;而对于区域 $r>2$, $\mathbf{D}=(2.057/r)\mathbf{a}_r$。分别求两个区域中的 ρ。

答案:$-e^{-0.5r},0$

4.37　在区域 $r\leqslant2$(圆柱坐标)中,$\mathbf{D}=[10r+(r^2/3)]\mathbf{a}_r$;而对于区域 $r>2$, $\mathbf{D}=[3/(128r)]\mathbf{a}_r$。求两个区域中的 ρ.

答案:$20+r,0$

4.38　已知 $\mathbf{D}=10\sin\theta\ \mathbf{a}_r+2\cos\theta\ \mathbf{a}_\theta$,求电荷密度。

答案:$\dfrac{\sin\theta}{5}(18+2\cot^2\theta)$

4.39　在球坐标系中,已知 $\mathbf{D}=\dfrac{3r}{r^2+1}\ \mathbf{a}_r$,求电荷密度。

答案:$3(r^2+3)/(r^2+1)^2$

4.40　在球坐标系中,已知 $\mathbf{D}=\dfrac{10}{r^2}[1-e^{-2r}(1+2r+2r^2)]\mathbf{a}_r$,求电荷密度。

答案:$40e^{-2r}$

4.41　在区域 $r\leqslant1$(球坐标)中,已知

$$\mathbf{D}=\left(\frac{4r}{3}-\frac{r^3}{5}\right)\mathbf{a}_r$$

对于区域 $r>1$, $\mathbf{D}=[5/(63r^2)]\mathbf{a}_r$。分别求这两个区域的电荷密度。

答案:$4-r^2,0$

4.42　在区域 $r\leqslant2$m(球坐标)中,有场 $\mathbf{E}=(5r\times10^{-5}/\varepsilon_0)\mathbf{a}_r$ (V/m)。求出球面 $r=2$m 所包围的净电荷。

答案:5.03×10^{-3}C

4.43　在球坐标系中,已知 $\mathbf{D}=(5r^2/4)\mathbf{a}_r$,对于由 $r=1$ 和 $r=2$ 球面间包围的体积,求散度定理等式两边的值。

答案:75π

4.44 在圆柱坐标系中,已知 $\mathbf{D}=(10r^3/4)\mathbf{a}_r$,对于由 $r=2$、$z=0$ 和 $z=10$ 所包围的体积,求散度定理等式两边的值.

答案:800π

4.45 已知 $\mathbf{D}=10\sin\theta\ \mathbf{a}_r+2\cos\theta\ \mathbf{a}_\theta$,对于由球面 $r=2$ 所包围的体积,求散度定理等式两边的值.

答案:$40\pi^2$

第5章 静电场中的功、能和位

5.1 移动点电荷所做的功

在电场 $\mathbf{E}$ 中，电荷 Q 受到一个力 $\mathbf{F}$。为了保持此电荷处于平衡状态，必须在相反方向施加一个力 $\mathbf{F}_a$（图 5-1）：

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}, \quad \mathbf{F}_a = -Q\mathbf{E}$$

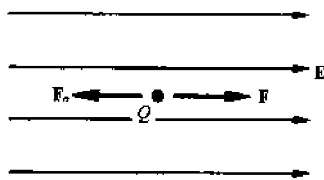


图 5-1

功定义为作用了一段距离的力。因此，当外施力 $\mathbf{F}_a$ 使电荷移动微分位移 $d\mathbf{l}$ 时，此力做的微分功为 dW。定量地表示为

$$dW = \mathbf{F}_a \cdot d\mathbf{l} = -Q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

注意：当 Q 是正电荷，且 $d\mathbf{l}$ 与 $\mathbf{E}$ 的方向相同时，$dW = -QEdl < 0$，这表明**电场做功**。（类似地，当物体 M 从高位置移向低位置时，地球的引力场对此物体做功。）另一方面，dW 大于零，意味着外力**克服电场做功**（可设想为提升物体 M）。

微分位移矢量的分量表达式为

$$d\mathbf{l} = dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z \qquad \text{（笛卡儿坐标）}$$

$$d\mathbf{l} = dr\mathbf{a}_r + rd\varphi\mathbf{a}_\varphi + dz\mathbf{a}_z \qquad \text{（圆柱坐标）}$$

$$d\mathbf{l} = dr\mathbf{a}_r + rd\theta\mathbf{a}_\theta + r\sin\theta d\varphi\mathbf{a}_\varphi \qquad \text{（球坐标）}$$

1.5 节列出了 dl 的对应表达式。

例 1 已知电场 $\mathbf{E} = (x/2 + 2y)\mathbf{a}_x + 2x\mathbf{a}_y$ (V/m)。求在该电场中移动点电荷 $Q = -20\ \mu\text{C}$ 所做的功：(a)从坐标原点到点(4,0,0)m，(b)从点(4,0,0)m 到点(4,2,0)m。

解 (a)第一条路径是沿 x 轴，因此 $d\mathbf{l} = dx\mathbf{a}_x$，从而

$$dW = -Q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = (20 \times 10^{-6})\left(\frac{x}{2} + 2y\right)dx$$

$$W = (20 \times 10^{-6})\int_0^4\left(\frac{x}{2} + 2y\right)dx = 80\ \mu\text{J}$$

(b)第二条路径是沿 $\mathbf{a}_y$ 方向，因此 $d\mathbf{l} = dy\mathbf{a}_y$，从而

$$W = (20 \times 10^{-6})\int_0^2 2x dy = 320\ \mu\text{J}$$

5.2 静电场的保守性

在静电场中，将一个点电荷从位置 B 移到位置 A 时，所做的功与路径无关。因此，根据图 5-2 可知

$$\int_{①}\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{②}\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \text{ 或 } \oint_{①-②}\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

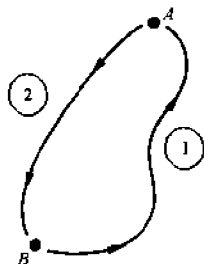


图 5-2

后边式子是沿由正向路径①和反向路径②所构成的**闭合回路**积分。相反，如果矢量场 $\mathbf{F}$ 在每一个闭合回路上均具有 $\oint\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0$ 的性质，那么 $\mathbf{F}$ 的任意线积分的值仅由路径的端点所决定。这样的场 $\mathbf{F}$ 被称为**保守场**，可以证明保守性的判据是 $\mathbf{F}$ 的旋度恒等于零（见 9.4 节）。

例 2 对于例 1 中的场 $\mathbf{E}$，求将同一电荷沿直线路径从点(4,2,0)移动到点(0,0,0)电场所做的功。

解

$$W=(20\times10^{-6})\int_{(4,2,0)}^{(0,0,0)}\left[\left(\frac{x}{2}+2y\right)\mathbf{a}_x+2x\mathbf{a}_y\right]\cdot(dx\mathbf{a}_x+dy\mathbf{a}_y)$$

$$=(20\times10^{-6})\int_{(4,2,0)}^{(0,0,0)}\left(\frac{x}{2}+2y\right)dx+2xdy$$

路径方程为 $y=x/2$，因此，$dy=\frac{1}{2}dx$。从而得

$$W=(20\times10^{-6})\int_4^0\frac{5}{2}xdx=-400\ \mu\text{J}$$

由例 1，沿直角两边路径离开原点克服电场做的功是 80 + 320 = 400 μJ，它正是沿直线路径回到原点电场所做的功，可见沿回路电场做的总功为零(保守场)。

5.3 两点间的电位

点 A 相对点 B 的**电位**定义为将单位正电荷 Q_u 从点 B 移到点 A 所做的功：

$$V_{AB}=\frac{W}{Q_u}=-\int_B^A\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}\quad(\text{J/C 或 V})$$

其中起点或参考点对应线积分的下限。式中的负号绝对不能省略。由于力 $\mathbf{F}_a=-Q\mathbf{E}$ 施加于电荷使之处于平衡状态，所以表达式中出现了负号。

因为 $\mathbf{E}$ 是保守场，所以

$$V_{AB}=V_{AC}-V_{BC}$$

式中 V_{AB} 可以看作是点 A 和点 B 之间的**电位差**。当 V_{AB} 大于零时，将单位正电荷从点 B 移到点 A 外力必须做功，且称点 A 的电位比点 B 的电位高。

5.4 点电荷的电位

由于点电荷 Q 的电场完全是沿径向分布的，所以

$$V_{AB}=-\int_B^A\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=-\int_{r_B}^{r_A}E_r\,dr=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_B}^{r_A}\frac{dr}{r^2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right)$$

对于正电荷 Q，当 r_A 小于 r_B 时，点 A 的电位比点 B 的电位高。

现在，如果将参考点 B 移到无穷远，从而有

$$V_{A\infty}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{\infty}\right)\qquad\text{或}\qquad V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

在以后的内容中，将多次使用这个关系式。今后使用此式的前提是应记住参考点的位置，而且不能把此式应用到电荷分布趋于无穷远的情况。

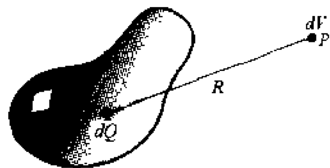


图 5-3

5.5 分布电荷的电位

如果电荷分布在有限区域内，已知电荷密度为 ρ (C/m³)，那么在电荷分布区域以外某点的电位就可以被确定。为求出电位，可以给出这个区域内任意点的微分电荷，如图 5-3 所示，在点 P 处，有

$$dV=\frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

对整个电荷分布区域积分，得点 P 处的总电位：

$$V=\int_{\text{体积}}\frac{\rho dv}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

上式中用 ρdv 代替 dQ。R 绝对不能和球坐标系中的 r 混淆，R 不是矢量，而是从 dQ 到固定点 P 的距离。还要说明的是，R 在电荷分布区域内总是到处变动，因此 R 不能从被积式中移出去。

如果电荷分布在面上或线上，上述含有 V 的表达式的积分就是整个面或线，此时用 ρ_s 或 ρ_l 代替 ρ。必须指出，求电荷分布区域以外电位的所有表达式均以**无穷远处作为零电位参考点**。

例 3　总电量为 $\frac{40}{3}$ nC 的电荷均匀分布在半径为 2m 的圆盘面内。求圆盘上的电荷在圆盘面轴线上离盘 2m 处产生的电位，并比较全部电荷集中在盘中心时在该处产生的电位。

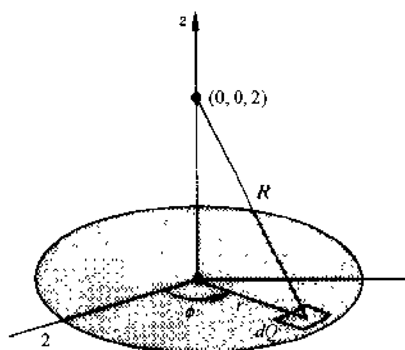


图 5-4

解　由图 5-4，得

$$\rho_s = \frac{Q}{A} = \frac{10^{-8}}{3\pi} \quad \text{C/m}^2, \qquad R = \sqrt{4 + r^2} \quad \text{m}$$

和

$$V = \frac{30}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{r dr d\varphi}{\sqrt{4 + r^2}} = 49.7\text{V}$$

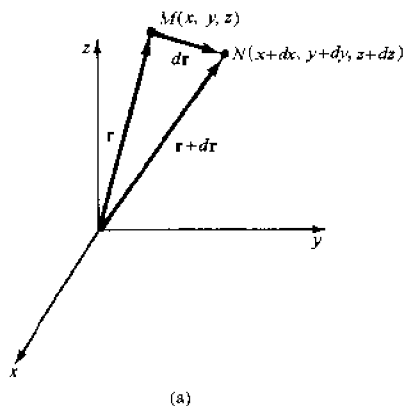
全部电荷集中在圆盘中心时，应用点电荷的电位表达式，得

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z} = \frac{\frac{40}{3} \times 10^{-9}}{4\pi(10^{-9}/36\pi)2} = 60 \text{ V}$$

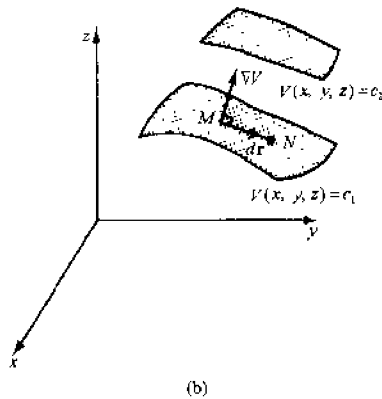
5.6　梯度

下面引入矢量分析的另一种运算。图 5-5(a)给出了某区域的两个相邻点 M 和 N，在此区域定义了一个标量函数 V。这两点的矢量差是

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z$$



(a)



(b)

图 5-5

从 M 到 N，V 的变化由下式给出

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

现在使用由 4.4 节引入的 ∇ 算子作用于 V，得

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

接着有

$$dV = \nabla V \cdot d\mathbf{r}$$

矢量场 ∇V(也写作 grad$V$)被称为标量函数 V 的**梯度**。由此可见，对于固定的 $|d\mathbf{r}|$，在给定的 $d\mathbf{r}$ 方向上，V 的变化与 ∇V 在该方向上的投影成正比。因此 ∇V 位于函数 V 增加最快的那个方向上。

梯度的另一种解释是：让点 M 和点 N 位于**同一等位面** $V(x, x, z) = c_1$ 上(见图 5-5(b))，

此时 $dV=0$，这表明∇V与$d\mathbf{r}$垂直。又$d\mathbf{r}$与等电位面相切，对于邻近的点N，$d\mathbf{r}$表示通过点M的任意切线。因此，∇V的方向必是点M处曲面的法向。由于∇V的方向是V增加的方向，所以∇V由曲面$V(x,y,z)=c_1$指向曲面$V(x,y,z)=c_2$，这里$c_2>c_1$。**电位函数的梯度是处处与等位面垂直的矢量场。**

在圆柱坐标系和球坐标系中的梯度可由笛卡儿坐标系中的梯度直接导出。注意每一项含有特定单位矢量方向上关于距离的V的偏导数。

$$\nabla V=\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x+\frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y+\frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z \qquad \text{（笛卡儿坐标）}$$

$$\nabla V=\frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r+\frac{\partial V}{r\partial \varphi}\mathbf{a}_\varphi+\frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z \qquad \text{（圆柱坐标）}$$

$$\nabla V=\frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r+\frac{\partial V}{r\partial \theta}\mathbf{a}_\theta+\frac{\partial V}{r\sin\theta\partial \varphi}\mathbf{a}_\varphi \qquad \text{（球坐标）}$$

虽然在任意坐标系中∇V被写作 grad$V$，但必须记住仅在笛卡儿坐标系中定义了∇算子。

5.7　E 和 V 之间的关系

由点A关于点B的电位的积分表达式可以写出V的微分为

$$dV=-\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$$

另一方面

$$dV=\nabla V\cdot d\mathbf{r}$$

由于对于任意小的位移，有$d\mathbf{l}=d\mathbf{r}$，所以

$$\mathbf{E}=-\nabla V$$

若已知电位函数V，电场强度可根据$\mathbf{E}=-\nabla V$求得。梯度是垂直于等位面的矢量，方向由低电位指向高电位。由于这里有负号，所以场$\mathbf{E}$由高电位指向低电位。

例4　在球坐标系包围点电荷Q的$r>0$的区域内，相对于无穷远处的电位为$V=Q/4\pi\varepsilon_0 r$。因此

$$\mathbf{E}=-\nabla V=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\mathbf{a}_r=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r$$

这与库仑定律一致。（原则上，V是通过对$\mathbf{E}$的积分获得的，因此不难理解对V的微分又可求得$\mathbf{E}$。）

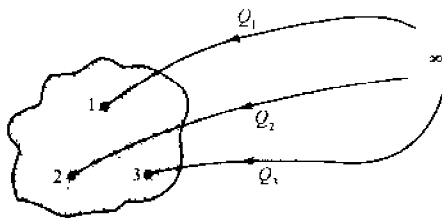


图 5-6

5.8　静电场中的能量

考虑$n=3$个点电荷一个一个顺序排列分布时外界所做的功。假设原来整个区域没有电荷且$\mathbf{E}=0$。

参考图 5-6，把第一个电荷Q_1放置于位置 1 时需要做的功为零。接下来，把Q_2移向这个区域时，所需要做的功等于Q_2与Q_1在此处产生的电位的乘积。从而可知把三个电荷放到此区域需要做的总功是

$$W_E=W_1+W_2+W_3=0+(Q_2V_{2,1})+(Q_3V_{3,1}+Q_3V_{3,2})$$

电位$V_{2,1}$应读为"由位置 1 处的电荷Q_1在点 2 处产生的电位"（这个特殊的符号表示法将不会在该书中再次出现）。式中功W_E是电荷分布产生的电场中所储存的能量。（习题 5.17 对这一问题有论述。）

现在，如果将三个电荷以相反的顺序放入该区域，总功将是

$$W_E=W_3+W_2+W_1=0+(Q_2V_{2,3})+(Q_1V_{1,3}+Q_1V_{1,2})$$

以上两个表达式相加，结果是储能的两倍：

$$2W_E=Q_1(V_{1,2}+V_{1,3})+Q_2(V_{2,1}+V_{2,3})+Q_3(V_{3,1}+V_{3,2})$$

项 $Q_1(V_{1,2}+V_{1,3})$ 是克服 Q_2 和 Q_3 产生的场所做的功，Q_2 和 Q_3 是该区域内仅有的除 Q_1 外的其他电荷。因此，$V_{1,2}+V_{1,3}=V_1$ 是位置 1 的电位，从而

$$2W_E = Q_1V_1 + Q_2V_2 + Q_3V_3$$

对于含有 n 个点电荷的区域，有

$$W_E = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} Q_mV_m$$

对电荷密度为 ρ (C/m^3)的区域，上式的求和变成了下面的积分(见习题 5.12)：

$$W_E = \frac{1}{2}\int \rho V dv$$

储能表达式的其他形式是

$$W_E = \frac{1}{2}\int \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}dv,\quad W_E = \frac{1}{2}\int \varepsilon E^2 dv,\quad W_E = \frac{1}{2}\int \frac{D^2}{\varepsilon}dv$$

在一个电路中，电容器内的场的储能为

$$W_E = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2$$

式中 C 是电容(单位为 F，名称法拉)，V 是组成电容器的两个导体之间的电压差，Q 是两个导体中任一个导体上的总电荷量。

例 5 在一个 $C=\varepsilon A/d$ 的平行板电容器两极板上加一恒定电压 V(见图 5-7)。求该电场的储能。

解 忽略边缘效应，两极板间的场是 $\mathbf{E}=(V/d)\mathbf{a}_n$，在其他区域，$\mathbf{E}=0$。此时

$$\begin{aligned} W_E &= \frac{1}{2}\int \varepsilon E^2 dv \\ &= \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{V}{d}\right)^2\int dv \\ &= \frac{\varepsilon AV^2}{2d} \\ &= \frac{1}{2}CV^2 \end{aligned}$$

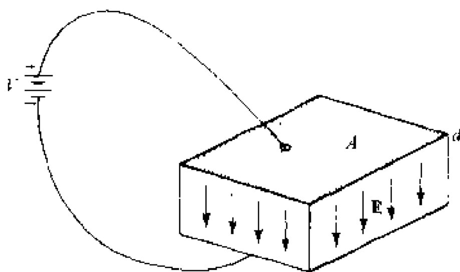


图 5-7

也可用另一种方法求解，由高斯定律(3.3 节)可知，一个导体上的总电荷可由表面上的 $\mathbf{D}$ 求得。因

$$\mathbf{D} = \frac{\varepsilon V}{d}\mathbf{a}_n,\qquad Q = |\mathbf{D}|A = \frac{\varepsilon VA}{d}$$

所以

$$W = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon AV^2}{d}\right) = \frac{1}{2}CV^2$$

习 题 求 解

5.1 已知电场 $\mathbf{E}=2x\,\mathbf{a}_x-4y\,\mathbf{a}_y$(V/m)，求沿下列路径移动电量为 +2 C 的电荷所做的功：(a)从点(2,0,0)m 到点(0,0,0)，然后从点(0,0,0)到点(0,2,0)；(b)沿连接两点的直线路径从点(2,0,0)到点(0,2,0)(见图 5-8)。

(a)沿 x 轴，$y=0$，$dy=dz=0$，得

$$dW = -2(2x\,\mathbf{a}_x)\cdot(dx\,\mathbf{a}_x) = -4x dx$$

沿 y 轴，$x=0$，$dx=dz=0$，得

$$dW = -2(-4y\,\mathbf{a}_y)\cdot(dy\,\mathbf{a}_y) = 8y dy$$

因此

$$W = -4\int_2^0 x dx + 8\int_0^2 y dy = 24\ \text{J}$$

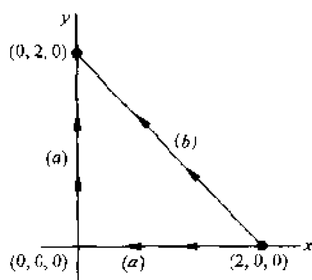


图 5-8

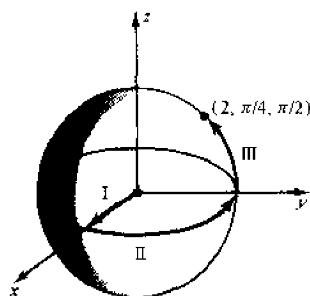


图 5-9

(b)直线路径的参数方程为

$$x = 2 - 2t, \qquad y = 2t, \qquad z = 0$$

式中 $0 \leqslant t \leqslant 1$。因此

$$\begin{aligned} dW &= -2[2(2-2t)\mathbf{a}_x - 4(2t)\mathbf{a}_y] \cdot [(-2dt)\mathbf{a}_x + (2dt)\mathbf{a}_y] \\ &= 16(1+t)dt \end{aligned}$$

从而

$$W = 16\int_0^1 (1+t)dt = 24 \text{ J}$$

5.2 在球坐标系中,求将 $Q = 5\ \mu\text{C}$ 的点电荷从原点移到点$(2\text{m}, \pi/4, \pi/2)$处外界所做的功,场为

$$\mathbf{E} = 5e^{-r/4}\mathbf{a}_r + \frac{10}{r\sin\theta}\mathbf{a}_\varphi \quad (\text{V/m})$$

在球坐标系中,有

$$d\mathbf{l} = dr\ \mathbf{a}_r + rd\theta\ \mathbf{a}_\theta + r\sin\theta d\varphi\ \mathbf{a}_\varphi$$

选择如图 5-9 所示的路径。沿 I 段,$d\theta = d\varphi = 0$,有

$$dW = -Q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = (-5 \times 10^{-6})(5e^{-r/4}dr)$$

沿 II 段,$dr = d\theta = 0$,有

$$dW = -Q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = (-5 \times 10^{-6})(10d\varphi)$$

沿 III 段,$dr = d\varphi = 0$,有

$$dW = -Q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

所以

$$W = (-25 \times 10^{-6})\int_0^2 e^{-r/4}dr + (-50 \times 10^{-6})\int_0^{\pi/2} d\varphi = -117.9\ \mu\text{J}$$

在这种情况下,移动电荷电场做了 117.9 μJ 的功。

5.3 已知在圆柱坐标系中场 $\mathbf{E} = (k/r)\mathbf{a}_r$,试说明将点电荷 Q 从任意径向距离 r 处移到两倍径向距离的地方时外界所做的功与 r 无关。

由于场仅有径向分量,所以

$$dW = -Q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -QE_r dr = \frac{-kQ}{r}dr$$

积分的下限和上限分别用 r_1 和 $2r_1$,得

$$W = -kQ\int_{r_1}^{2r_1} \frac{dr}{r} = -kQ\ln 2$$

它确实与 r_1 无关。

5.4 线电荷 $\rho_l = (10^{-9}/2)$ C/m 位于 z 轴上,求 V_{AB}。这里 A 是点$(2\text{m}, \pi/2, 0)$,B 是点$(4\text{m}, \pi, 5\text{m})$。

$$V_{AB} = -\int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

其中

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathbf{a}_r$$

由于线电荷产生的场完全沿径向分布,场强 $\mathbf{E}$ 与 $d\mathbf{l}$ 的点乘为 $E_r dr$,所以

$$V_{AB} = -\int_B^A \frac{10^{-9}}{2(2\pi\varepsilon_0 r)}dr = -9[\ln r]_4^2 = 6.24\ \text{V}$$

5.5 在习题 5.4 的场中，求 V_{BC}。这里 $r_B = 4\text{m}$ 和 $r_C = 10\text{m}$。接下来求 V_{AC}，并与 V_{AB}、V_{BC} 的和相比较。

解

$$V_{BC} = -9[\ln r]_C^B = -9(\ln 4 - \ln 10) = 8.25\text{V}$$

$$V_{AC} = -9[\ln r]_C^A = -9(\ln 2 - \ln 10) = 14.49\text{V}$$

$$V_{AB} + V_{BC} = 6.24\text{V} + 8.25\text{V} = 14.49\text{V} = V_{AC}$$

5.6 在球坐标系中，已知场 $\mathbf{E} = (-16/r^2)\mathbf{a}_r\,(\text{V/m})$，求点$(2\text{m}, \pi, \pi/2)$相对于点$(4\text{m}, 0, \pi)$的电位。

解 等位面是同心球壳。设 A 处 $r = 2\text{m}$ 和 B 处 $r = 4\text{m}$，则

$$V_{AB} = -\int_4^2 \left(\frac{-16}{r^2}\right)dr = -4\text{V}$$

5.7 在笛卡儿坐标系中，线电荷密度 $\rho_l = 400\ \text{pC/m}$，电荷沿 x 轴分布，零电位面通过点(0.5, 12)m（见图 5-10）。求点(2, 3, −4)m 处的电位。

解 由于线电荷沿 x 轴分布，所以电位的表达式与两点处的 x 坐标无关。这样

$$r_A = \sqrt{9 + 16} = 5\text{m}$$

$$r_B = \sqrt{25 + 144} = 13\text{m}$$

从而可得

$$V_{AB} = -\int_{r_B}^{r_A} \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}dr = -\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_A}{r_B} = 6.88\ \text{V}$$

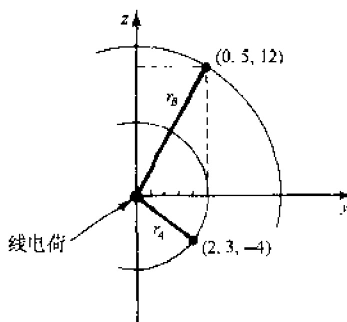


图 5-10

5.8 求在原点处电量为 $Q = 500\ \text{pC}$ 的点电荷产生的电场中，$r_A = 5\text{m}$ 处相对于 $r_B = 15\text{m}$ 处的电位，选取无穷远处为零参考点。

解 由于是点电荷，所以

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

求电位差时不需要零参考点，从而有

$$V_{AB} = \frac{500 \times 10^{-12}}{4\pi(10^{-9}/36\pi)}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{15}\right) = 0.60\ \text{V}$$

当求电位 V_5 和 V_{15} 时，需要把无穷远处当成零参考点，从而有

$$V_5 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{5}\right) = 0.90\text{V},\qquad V_{15} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{15}\right) = 0.30\text{V}$$

电位差为

$$V_{AB} = V_5 - V_{15} = 0.60\text{V}$$

5.9 40nC 的电荷沿半径为 2m 的圆环均匀分布。求圆环轴上离圆环平面 5m 处的电位，并与所有电荷以点电荷的形式位于原点处的结果相比较。

解 由于是线电荷，所以

$$V = \int \frac{\rho_l dl}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

式中，$\rho_l = \dfrac{40 \times 10^{-9}}{2\pi(2)} = \dfrac{10^{-8}}{\pi}\ \text{C/m}$，$R = \sqrt{29}\ \text{m}$，$dl = (2\text{m})d\varphi$（见图 5-11），所以

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{(10^{-8}/\pi)(2)d\varphi}{4\pi(10^{-9}/36\pi)\sqrt{29}} = 66.9\text{V}$$

如果电荷集中在原点，则

$$V = \frac{40 \times 10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0(5)} = 72.0\text{V}$$

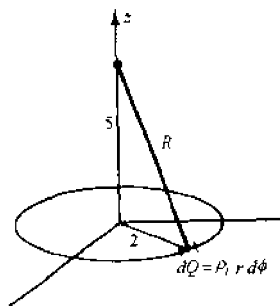


图 5-11

5.10　五个 $Q=20\text{nC}$ 的相同点电荷位于 $x=2,3,4,5,6\text{m}$ 处，求原点处的电位。



$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{m=1}^{n}\frac{Q_m}{R_m}$$

$$=\frac{20\times10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)=261\text{V}$$

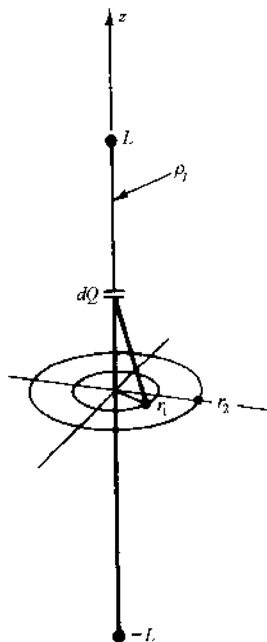


图 5-12

5.11　电荷沿长为 $2L$ 的直线段均匀分布(图 5-12)。在该直线段的中点附近空间有两个点，两点的径向距离 r_1 和 r_2 与电荷分布线段的长度相比很小，试说明电位 V_{12} 与无限长线电荷产生的 V_{12} 一样。

解　以无穷远处为零参考点，点 1 处的电位是

$$V_1=2\int_0^L\frac{\rho_l dz}{4\pi\varepsilon_0(z^2+r_1^2)^{1/2}}$$

$$=\frac{2\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln(z+\sqrt{z^2+r_1^2})\right]_0^L$$

$$=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln(L+\sqrt{L^2+r_1^2})-\ln r_1\right]$$

类似地，点 2 处的电位是

$$V_2=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln(L+\sqrt{L^2+r_2^2})-\ln r_2\right]$$

如果 $L\gg r_1$ 和 $L\gg r_2$，则

$$V_1\approx\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}(\ln 2L-\ln r_1),\qquad V_2\approx\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}(\ln 2L-\ln r_2)$$

从而

$$V_{12}=V_1-V_2\approx\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

它与习题 5.7 中无限长线电荷产生的电位表达式相同。

5.12　在体积 v 中分布着密度为 ρ 的电荷，它产生一个电场，其能量为

$$W_E=\frac{1}{2}\int_v\rho V dv$$

试说明上式的等价表达式是

$$W_E=\frac{1}{2}\int\varepsilon E^2 dv$$

解　图 5-13 表明了含有电荷的区域 v 被包围在半径为 R 的大球域内。由于在 v 外 ρ 为零，所以

$$W_E=\frac{1}{2}\int_v\rho V dv=\frac{1}{2}\int_{球区域}\rho V dv=\frac{1}{2}\int_{球区域}(\nabla\cdot\mathbf{D})V dv$$

应用矢量恒等式 $\nabla\cdot V\mathbf{A}=\mathbf{A}\cdot\nabla V+V(\nabla\cdot\mathbf{A})$，上面的被积式成为

$$W_E=\frac{1}{2}\int_{球区域}(\nabla\cdot V\mathbf{D})dv-\frac{1}{2}\int_{球区域}(\mathbf{D}\cdot\nabla V)dv$$

这个表达式对于任意大半径 R 都成立。以下取 $R\to\infty$。

对等式右边第一个积分，用散度定理，可写成

$$\frac{1}{2}\oint_{球表面}V\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}$$

当球变得很大时，被包围的体电荷看起来好像是点电荷。这样，在曲面上，D 的形式为 k_1/R^2，V 的形式为 k_2/R。因此，被积式以 $1/R^3$ 减少。由于表面积仅以 R^2 增加，所以

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{球表面}V\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}=0$$

在极限情况下，剩余的积分成为

$$W_E=-\frac{1}{2}\int(\mathbf{D}\cdot\nabla V)dv=\frac{1}{2}\int(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})dv$$

利用 $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$，储能也可由下式表示：

$$W_E=\frac{1}{2}\int\varepsilon E^2dv \qquad 或 \qquad W_E=\frac{1}{2}\int\frac{D^2}{\varepsilon}dv$$

5.13 在自由空间中，已知电位函数 $V=2x+4y$ (V)，求以原点为中心1立方米体积内的储能。进一步分析其他地方1立方米体积内的储能。

$$\mathbf{E}=-\nabla V=-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x+\frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y+\frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z\right)=-2\mathbf{a}_x-4\mathbf{a}_y \quad \text{V/m}$$

这个场在空间各处大小($E=\sqrt{20}$V/m)是常数，方向($-2\mathbf{a}_x-4\mathbf{a}_y$)也恒定，因此总储能是无限的。(这样的场可能是在无限大平行板的电容器中。这将需要通过做无限多的功来为这样的电容器充电。)

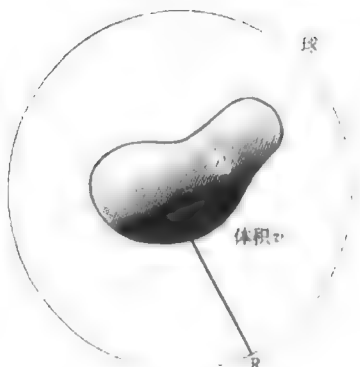


图 5-13

然而，不论场中的储能是否为无穷大，都可以用能量密度来描述能量的分布状况。在表达式

$$W_E=\frac{1}{2}\int\varepsilon E^2dv$$

中，假设每一个小体积 dv 被分配能量 $w dv$，其中

$$w=\frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

这样，对于本题中的场，能量密度就成为常数：

$$w=\frac{1}{2}\varepsilon_0(20)=\frac{10^{-8}}{36\pi}\ \text{J/m}^3$$

因此，1立方米体积内含有$(10^{-8}/36\pi)$J的能量。

5.14 两个薄导电半平面，彼此绝缘地沿 z 轴放于 $\varphi=0$ 和 $\varphi=\pi/6$ 处。已知 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/6$ 内电位函数是 $V=(-60\varphi/\pi)$V，求半平面 $0.1\leqslant r\leqslant0.6$m 和 $0\leqslant z\leqslant1$m 之间区域内的储能。假设场区域是自由空间。

为了求空间中有限区域内的储能 W_E，必须对能量密度在整个区域内积分(见习题5.13)。在两个半平面之间，场强为

$$\mathbf{E}=-\nabla V=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{-60\varphi}{\pi}\right)\mathbf{a}_\varphi=\frac{60}{\pi r}\mathbf{a}_\varphi(\text{V/m})$$

因此

$$W_E=\frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^1\int_0^{\pi/6}\int_{0.1}^{0.6}\left(\frac{60}{\pi r}\right)^2 r\,dr\,d\varphi\,dz=\frac{300\varepsilon_0}{\pi}\ln 6=1.51\ \text{nJ}$$

5.15 已知在 $r=0.01$m 和 $r=0.05$m 的两个同心圆柱导体之间的电场为 $\mathbf{E}=(10^5/r)\mathbf{a}_r$ (V/m)，忽略边缘效应。求存储在0.5m长的同心圆柱导体内的能量。假设场区域为自由空间。

$$W_E=\frac{1}{2}\int\varepsilon_0E^2dv=\frac{\varepsilon_0}{2}\int_h^{h+0.5}\int_0^{2\pi}\int_{0.01}^{0.05}\left(\frac{10^5}{r}\right)^2 r\,dr\,d\varphi\,dz=0.224\ \text{J}$$

5.16 将 $Q=4$nC 的四个相同点电荷放在边长为1m的正方形四个角上，求存储在该系统中的能量。当只有两个电荷放置在相对的两个角上时，存储在该系统中的能量为多少？

$$2W_E=Q_1V_1+Q_2V_2+Q_3V_3+Q_4V_4=4Q_1V_1$$

以上等式应用了系统的对称生。又

$$V_1=\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0R_{12}}+\frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0R_{13}}+\frac{Q_4}{4\pi\varepsilon_0R_{14}}=\frac{4\times10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=97.5\ \text{V}$$

因此

$$W_E=2Q_1V_1=2(4\times10^{-9})(97.5)=780\ \text{nJ}$$

当仅有两个电荷对角放时，有

$$2W_E=Q_1V_1=(4\times10^{-9})\left(\frac{4\times10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{2}}\right)=102\ \text{nJ}$$

5.17 $Q_1=3$nC 和 $Q_2=-3$nC 的两个点电荷被分离开 $d=0.2$m 的距离，存储在该系统中的能量为多少？

$$2W_E=Q_1V_1+Q_2V_2=Q_1\left(\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0d}\right)+Q_2\left(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0d}\right)$$

因此 $$W_E = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\epsilon_0 d} = \frac{(3\times 10^{-9})^2}{4\pi(10^{-9}/36\pi)(0.2)} = -405\ \text{nJ}$$

由于能量密度为$\frac{1}{2}\epsilon E^2$,因此积分

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{所有空间}\epsilon E^2 dv$$

必为正,而上面求得的储能是负的,似乎不合理。产生这个矛盾的原因是:令组成点电荷系统时外界所做的功与电场储能相等时,忽略了两电荷相距无穷远的距离时电场中已存在的无穷大能量(将两点电荷分开无穷远的距离,外界要做无穷大的功)。因而采用上述结果 $W_E = -405$ nJ 意味着能量比无穷远处的参考点低 405 nJ。因为只有能量的差值才具有物理意义,在本问题中,忽略了参考点处的能量。

5.18 一个半径为 a、以原点为球心的球形导电壳的电位分布为

$$V = \begin{cases} V_0, & r \leqslant a \\ V_0 a/r, & r > a \end{cases}$$

以无穷远处为零参考点。求这个场的储能表达式。

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \begin{cases} \mathbf{0}, & r < a \\ (V_0 a/r^2)\mathbf{a}_r, & r > a \end{cases}$$

$$W_E = \frac{1}{2}\int \epsilon_0 E^2 dv = 0 + \frac{\epsilon_0}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^{\infty}\left(\frac{V_0 a}{r^2}\right)^2 r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi = 2\pi\epsilon_0 V_0^2 a$$

注意:由高斯定律,球壳上的总电荷是

$$Q = DA = \left(\frac{\epsilon_0 V_0 a}{a^2}\right)(4\pi a^2) = 4\pi\epsilon_0 V_0 a$$

球壳上的电位是 $V = V_0$。此时,$W_E = \frac{1}{2}QV$ 可以为是储存在球形电容器中的能量(单个球形电容器可理解为另一极板是位于无穷远处的同心球面的电容器)。

补 充 习 题

5.19 求 $Q = -20\ \mu$C 的点电荷沿 $x^2 = 8y$ 路径从原点移到点(4,2,0)m 处所做的功,电场强度为

$$\mathbf{E} = 2(x + 4y)\mathbf{a}_x + 8x\,\mathbf{a}_y \quad (\text{V/m})$$

答案:1.60 mJ

5.20 直接沿径向路径重做习题 5.2。

答案:$-39.35\ \mu$J(这个场在 z 轴上是非保守场)

5.21 利用如图 5-14 所示路径重做习题 5.2。

答案:$-117.9\ \mu$J

5.22 在场 $\mathbf{E} = (10^5/r)\,\mathbf{a}_r + 10^5 z\,\mathbf{a}_z$ (V/m)中,求 $Q = 3\ \mu$C 的点电荷从球坐标中的点(4m, π, 0)移到点(2m, $\pi/2$, 2m)所做的功。

答案:-0.392 J

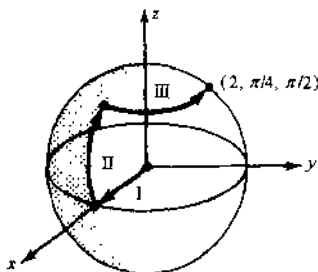


图 5-14

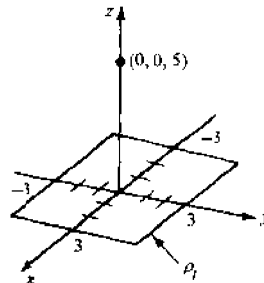


图 5-15

5.23 在场 $\mathbf{E} = (10^5/r)\mathbf{a}_r$ (V/m)中,求 $Q = 2$ nC 的点电荷从无穷远处移到 $r = 2$m 处和从无穷远处移到 $r = 4$m 处所做的功的差。

答案：1.39×10^{-4} J

5.24 如图5-15所示，将密度为 $\rho_l=1$ nC/m的均匀线电荷放于边长为6m的正方形一个边上。求点(0,0,5)m处的电位。

答案：35.6V

5.25 求距离均匀密度为 ρ_l(C/m)的 L 米长的线电荷的中点沿径向朝外 d 米处的电位表达式，并用这一结果验证习题5.24。

答案：$\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{L/2+\sqrt{d^2+L^2/4}}{d}$ (V)

5.26 在 $z=0$、$R\leqslant r\leqslant R+1$ 的环内均匀分布有面电荷，其密度为 ρ_s，试说明在原点处产生的电位与 R 无关。

5.27 总量为160 nC的电荷分成四个等值的点电荷，将它们以90°的间隔放在半径为3m的圆环上。然后，将总电荷分成八个等值的点电荷，重新将它们以45°的间隔放在圆环上。最后以线密度 $\rho_l=(160/6\pi)$ nC/m分布在圆环上。分别求以上三种情形圆环轴上离圆环平面5m处的电位。

答案：247V

5.28 在球坐标系中，点 A 在半径2m处，点 B 在半径4m处。已知场 $\mathbf{E}=(-16/r^2)\ \mathbf{a}_r$ (V/m)，求以无穷远处为零参考点时点 A 的电位。进一步求点 B 的电位和电位差 V_A-V_B，并与习题5.6的结果相比较。

答案：$V_A=2V_B=-8$V

5.29 如果零电位参考点在 $r=10$m处，$Q=0.5$nC的点电荷位于原点，分别求 $r=5$m处和 $r=15$m处的电位。当半径为多少时，该处的电位与 $r=5$m处的电位大小相同但符号相反？

答案：0.45V，−0.15V，∞

5.30 在笛卡儿坐标系中，$Q=0.4$nC的点电荷位于点(2,2,3)m处，求电位差 V_{AB}。此处点 A 坐标为(2,2,3)m，点 B 坐标为(−2,3,3)m。

答案：2.70V

5.31 求在球坐标系中由放置在 y 轴上 $y=\pm d/2$ 处两个大小相等符号相反的点电荷产生的电位，设 $r\gg d$。

答案：$(Qd\sin\theta)/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$

5.32 将习题5.31中的两个点电荷放置在 z 轴上时，重求产生的电位。

答案：$(Qd\cos\theta)/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$

5.33 求习题5.14中导体上的电荷密度。

答案：当 $\varphi=0$ 时，$\frac{+60\varepsilon_0}{\pi r}$ (C/m²)；当 $\varphi=\frac{\pi}{6}$ 时，$\frac{-60\varepsilon_0}{\pi r}$ (C/m²)

5.34 均匀长直线电荷 $\rho_l=2$nC/m位于平面 $z=0$ 内且在 $y=3$m处与 x 轴平行。求点 A(2m,0,4m)和点 B(0,0,0)之间的电位差 V_{AB}。

答案：−18.4V

5.35 均匀平面电荷 $\rho_s=(1/6\pi)$ nC/m² 位于平面 $x=0$ 内，另一均匀平面电荷 $\rho_s=(-1/6\pi)$ nC/m² 位于平面 $x=10$m内。分别求点 A(10m,0,0)、点 B(4m,0,0) 和点 C(0,0,0)两两之间的电位差 V_{AB}、V_{BC} 和 V_{AC}。

答案：−36V，−24V，−60V

5.36 在圆柱坐标系中，已知在区域 $0\leqslant r\leqslant 2$m内电场强度 $\mathbf{E}=(5/r)\ \mathbf{a}_r$ (V/m)，在区域 $r>2$m内电场强度 $\mathbf{E}=2.5\ \mathbf{a}_r$ V/m，求点 A(1m,0,0)和点 B(4m,0,0)之间电位差 V_{AB}。

答案：8.47V

5.37 0.5m×1.0m的平行板电容器，两极板间距离为2cm，两极板间电压差为10V。求此电容器储存的能量，假设 $\varepsilon=\varepsilon_0$。

答案：11.1 nJ

5.38 在习题5.37中所述的电容器两极板间加200V的电压。

(a)求储存的能量。

(b)保持 d_1 为2cm和两极板间的电压差为200V不变(图5-16)，而 d_2 增加到2.2cm。求最终的储能。(提示：$\Delta W_E=\frac{1}{2}(\Delta C)V^2$)

答案：(a)4.4 μJ；(b)4.2 μJ

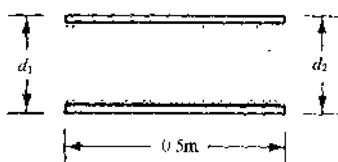


图5-16

5.39 三个相同的点电荷 $Q=2$nC以0.5m的间距排列在一条直线上，求此系统储存的能量。

答案：180 nJ

5.40 在题 5.39 中，如果排列在中间的电荷变为 -2 nC，重求储能。

答案： 108 nJ

5.41 将四个相同的点电荷 $Q=2$ nC 依次放在边长为 $\frac{1}{3}$ m 的正方形四个角上，依次求出点电荷放置后系统的能量。

答案：0，108 nJ，292 nJ，585 nJ

5.42 在圆柱坐标系中，已知电场 $\mathbf{E}=-5e^{-r/a}\mathbf{a}_r$，求由 $r\leqslant 2a$ 和 $0\leqslant z\leqslant 5a$ 组成的体积内的储能。

答案：$7.89\times 10^{-10}a^3$

5.43 已知电位 $V=3x^3+4y^2$(V)，求由 $0\leqslant x\leqslant 1$m、$0\leqslant y\leqslant 1$m 和 $0\leqslant z\leqslant 1$m 组成的区域内的储能。

答案：147 pJ

第 6 章　电流、电流密度和导体

6.1 引言

电流是指通过给定点或给定面的电荷的传输速率。通常恒定电流用符号 I 表示，时变电流用符号 i 表示。电流的单位是**安培**(1A = 1C/s;在国际单位制中，安培是基本单位，库仑是导出单位)。

欧姆定律建立了电流、电压和电阻之间的关系。对于简单的直流电流，$I = V/R$。然而当电荷悬浮于液体或气体中以及正电荷和负电荷载流子呈现不同特征时，欧姆定律的简单形式并不适用。因此，在电磁理论中，电流密度 $\mathbf{J}$ (A/m^2)比电流 I 受到更多的关注。

6.2 运动电荷

如图 6-1(a)所示，考虑真空电场中带正电粒子受的力。电荷在力 $\mathbf{F} = +Q\mathbf{E}$ 的作用下，将产生一个恒定的加速度。因此，只要该带电粒子在电场 $\mathbf{E}$ 中，它就沿着 $\mathbf{E}$ 的方向不断加速运动。当电荷在液体或气体中时，如图 6-1(b)所示，它同介质中的粒子多次碰撞，导致运动方向随机性改变。对于恒定的 $\mathbf{E}$ 和均匀介质，各个粒子速度的随机性仍存在，但统计平均值不为零，只有恒定的平均速度，这个速度被称为沿电场 $\mathbf{E}$ 方向的**漂移速度** $\mathbf{U}$。金属中的导电是由组成晶格结构的原子最外层电子运动形成的。根据**电子-气理论**，这些电子与带电粒子在液体或气体中的运动方式一样，它们会达到一个平均漂移速度。漂移速度与电场强度成正比

$$\mathbf{U} = \mu\mathbf{E}$$

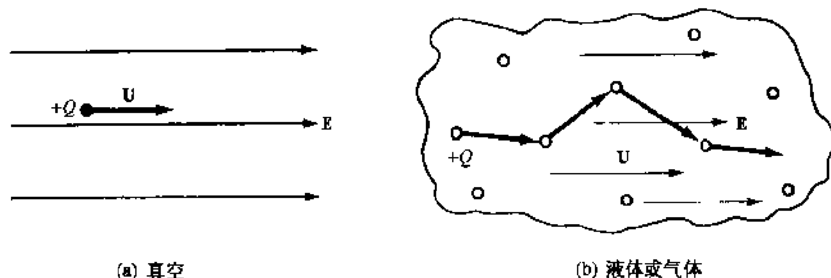


图 6-1

式中**迁移率** μ 的单位为 m^2/(V·s)。导体中每立方米含有 10^{28} 数量级的原子，在外加电场情况下，良导体中每个原子贡献一个或两个自由运动的电子。迁移率 μ 随着温度和固体的晶体结构而变化。固体中的粒子随温度增加产生更加剧烈的振动。这使得电荷更难运动。因此，温度升高，迁移率 μ 减小，导致在给定场 $\mathbf{E}$ 中更小的迁移速度(或电流)。在电路分析中，这一现象用材料的**电阻率**来描述，这标明电阻率随温度升高而增大。

6.3 运流电流密度 J

如图 6-2 所示，在体积 v 中，形成电荷密度 ρ 的许多带电粒子以速度 $\mathbf{U}$ 向右运动。假设粒子在该区域中保持相对位置不变。当这些电荷通过面 S 时，形成了以下的运流电流密度

$$\mathbf{J} = \rho\mathbf{U}\ (\text{A/m}^2)$$

当然，如果区域 v 的横截面变化或整个 v 中的密度 ρ 不是常数，那么 $\mathbf{J}$ 将随时间变化而不是常数。进一步，当区域最后部分通过 S 时，$\mathbf{J}$ 将是零。这种由众多带电粒子运动形成电流密度的

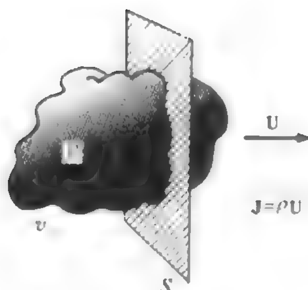


图 6-2

概念在电磁场理论研究中通常是有用的。

6.4　传导电流密度 J

最有趣的是在具有固定横截面的导体中电场产生的传导电流。电流密度还是由下式给出：

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{U} \ (\mathrm{A/m^2})$$

根据关系 $\mathbf{U} = \mu \mathbf{E}$，上式可写成

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

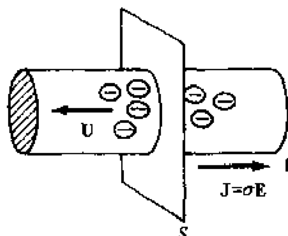


图 6-3

式中 $\sigma = \rho\mu$ 是材料的**电导率**，单位为 S/m（西门子每米）。在金属导体中，电荷载流子是电子，它的漂移方向与电场方向相反（图 6-3）。因此，对于电子，ρ 和 μ 都是负的，从而电导率为正，就像正电荷载流子的情况一样。无论电荷载流子的符号如何，**J** 和 **E** 都有相同的方向。当正电荷向右移动时，电子向左移动，并且总是把 ρ 和 μ 视为正的，这是惯例。

关系式 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ 通常被看作是**欧姆定律的点形式**。因子 σ 计及了自由运动电子的密度（ρ）和在晶格中移动的迁移率（μ）。可以预料 σ 是温度的函数。

例 1　在银导体中，对应于漂移速度 6.0×10^{-4} m/s 的电场强度和电流密度是多少？

解　对于银，$\sigma = 61.7$ MS/m 和 $\mu = 5.6 \times 10^{-3} \mathrm{m^2/(V \cdot s)}$，所以

$$E = \frac{U}{\mu} = \frac{6.0 \times 10^{-4}}{5.6 \times 10^{-3}} = 1.07 \times 10^{-1} \ \mathrm{V/m}$$

$$J = \sigma E = 6.61 \times 10^{6} \ \mathrm{A/m^2}$$

6.5　电导率 σ

在液体或气体中，通常同时存在正负两种离子，有的离子带一个电荷，有的离子带两个电荷，而且它们的质量可能不同。电导率的表达式包括了所有这些因素。然而，假若所有负离子是相同的，正离子也是相同的，则电导率含有两项，如图 6-4(a)所示。在金属导体中，仅价电子可以自由运动。在图 6-4(b)中，全部价电子向左运动，此时电导率仅包含一项，即自由运动电子的电荷密度 ρ_e 和迁移率 μ_e 的乘积。

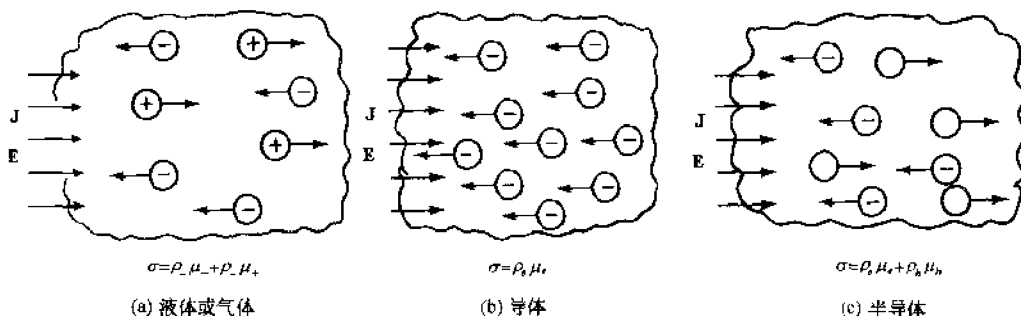


图 6-4

稍微更加复杂的导电过程出现在诸如锗和硅的半导体中。在晶体结构中，每个原子同相邻原子有四个共价键。然而，在室温下，当诸如光等一些外源能量注入晶体时，电子可能从共价键的位置移走，这就产生了导电的**电子-空穴对**（electron-hole pair）。这样的材料被称为**本征半导体**。电子-空穴对的存在极为短暂，通过复合而消失，同时其他电子-空穴对又不断地形成。如图 6-4(c)所示，电导率 σ 由两项组成，一项是电子，另一项是空穴。实际上，纯净半导体加入三价或五价元素可以制成 p 型或 n 型半导体材料。在这种 n 型和 p 型材料中仍存在上

面所描述的本征特性，只不过由于 n 型材料中多余的电子或 p 型材料中多余的空穴的存在使得这种本征特性表现得并不明显。在电导率 σ 中，密度 ρ_e 或 ρ_h 中的一个将远大于另一个。

例2 确定室温下本征半导体锗的电导率。

解 在300K时，每立方米本征半导体锗中有 2.5×10^{19} 个电子-空穴对。电子迁移率为 $\mu_e=0.38\text{m}^2/(\text{V}\cdot\text{s})$，空穴迁移率为 $\mu_h=0.18\text{m}^2/(\text{V}\cdot\text{s})$。由于材料没有掺杂质，电子数和空穴数是相等的，所以

$$\sigma = N_e e(\mu_e + \mu_h) = (2.5\times10^{19})(1.6\times10^{-19})(0.38+0.18) = 2.24\text{S/m}$$

6.6 电流 I

如图6-5所示，电流密度 $\mathbf{J}$ 穿过面 S，电流 I 通过对 $\mathbf{J}$ 和 $d\mathbf{S}$ 点积的积分而获得：

$$dI = \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S},\quad I = \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}$$

当然，$\mathbf{J}$ 不一定是均匀通过 S，而且 S 也不一定是平面。

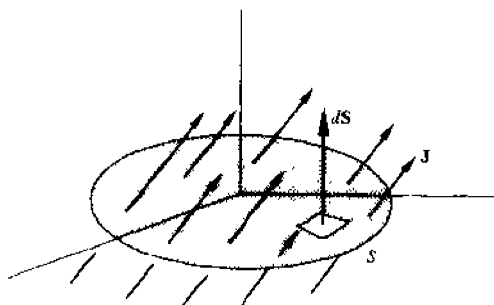


图 6-5

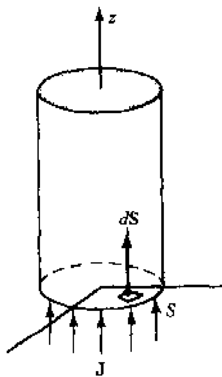


图 6-6

例3 求如图6-6所示圆形导线中的电流，电流密度为 $\mathbf{J}=15(1-e^{-1000r})\mathbf{a}_z\ (\text{A/m}^2)$，导线的半径为2mm。

解 设导线的横截面积为 S，因

$$dI = \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} = 15(1-e^{-1000r})\mathbf{a}_z\cdot r\,dr\,d\varphi\,\mathbf{a}_z$$

那么

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{0.002} 15(1-e^{-1000r})\,r\,dr\,d\varphi$$

$$= 1.33\times10^{-4}\text{A} = 0.133\text{ mA}$$

所以流过整个导体任一截面 S 的总电流为 $I=0.133$ mA。

6.7 电阻 R

如图6-7所示，如果一个导体有均匀的横截面积 A，其长度为 l，该导体两端之间有电压 V，则

$$E = \frac{V}{l} \qquad 和 \qquad J = \frac{\sigma V}{l}$$

假设电流在面积 A 上均匀分布，那么总电流是

$$I = JA = \frac{\sigma AV}{l}$$

由欧姆定律 $V=IR$ 可知，电阻为

$$R = \frac{l}{\sigma A}\ (\Omega)$$

（注意：$1\text{S}^{-1}=1\Omega$；西门子曾被称为姆欧。）这个电阻表达式适用于长为 l、横截面积为常数的所有导体。然而，如果沿导体表面的电流密度比中心处大，那么上面表达式就不适用。对于电流

分布不均匀的导体，其电阻为

$$R=\frac{V}{\int \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}}=\frac{V}{\int \sigma\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}}$$

如果已知的是 $\mathbf{E}$，而不是导体两端间的电压，则电阻为

$$R=\frac{\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}}{\int \sigma\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}}$$

分子给出了导体两端的电压降，而分母给出了总电流。

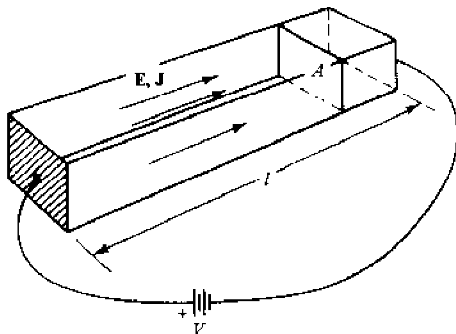


图 6-7

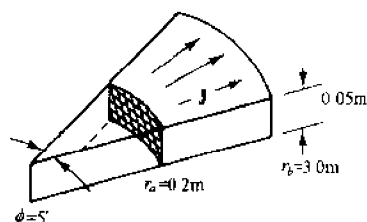


图 6-8

例 4　求如图 6-8 所示金属块内外弧面之间的电阻，材料为银，电导率为 $\sigma=6.17\times10^7$ S/m。

解　如果穿过内外弧面间的电流 I 相等，可设

$$\mathbf{J}=\frac{k}{r}\mathbf{a}_r \qquad 和 \qquad \mathbf{E}=\frac{k}{\sigma r}\mathbf{a}_r$$

则（$5°=0.0873$rad）

$$R=\frac{\int_{0.2}^{3.0}\frac{k}{\sigma r}\mathbf{a}_r\cdot dr\ \mathbf{a}_r}{\int_0^{0.05}\int_0^{0.0873}\frac{k}{r}\mathbf{a}_r\cdot rd\phi dz\ \mathbf{a}_r}$$

$$=\frac{\ln 15}{\sigma(0.05)(0.0873)}=1.01\times10^{-5}\ \Omega=10.1\ \mu\Omega$$

6.8　电流面密度 K

有时电流被限制于导体表面，诸如波导的内壁。对于这样的**电流面**，定义电流面密度矢量 $\mathbf{K}$（单位：A/m）是有益的，它给出了垂直于电流方向的单位长度的电荷传输率（一些书中用符号 $\mathbf{J}_S$ 表示）。图 6-9 表明了总电流 I 沿半径为 r 的圆柱面流向 z 轴正向的分布情况。在这种情况下，在面上的每一点处，有

$$\mathbf{K}=\frac{I}{2\pi r}\mathbf{a}_z$$

对于其他电流分布面，$\mathbf{K}$ 可能是逐点变化的。

一般地，在一个电流面内，流过环路 C 的电流可通过沿环路对 $\mathbf{K}$ 的**法向**分量积分获得。

$$I=\int_C K_n dl$$

例 5　一个薄导电面放置于平面 $z=0$ 内的区域 $0<x<0.05$m 中。流向 $\mathbf{a}_y$ 方向的 25A 的电流按正弦规律分布于该面内，在 $x=0$ 和 $x=0.05$m 处线密度为零，在 $x=0.025$m 处最大（见图 6-10）。求 $\mathbf{K}$ 的表达式。

解　设表达式为 $\mathbf{K}=(k\sin 20\pi x)\mathbf{a}_y$（A/m），$k$ 为未知的常数。而

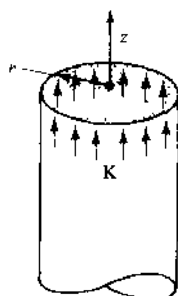


图 6-9

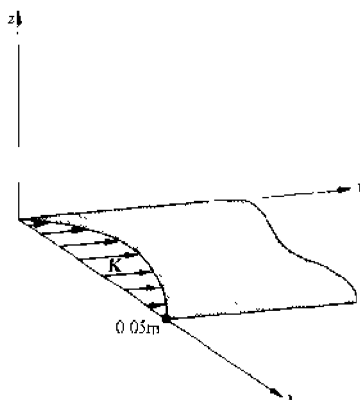


图 6-10

$$I = 25 = \int K_y dx = k\int_0^{0.05} \sin 20\pi x dx$$

所以
$$25 = k/(10\pi) \quad 或 \quad k = 250\pi \ \text{A/m}$$

6.9　电流的连续性

我们已经分析过已知一般曲面 S 上的 $\mathbf{J}$ 时穿过曲面的电流 I。现在，如果面是**封闭**的，要使净电流流出该面，面内正电荷必须减少：

$$\oint \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} = I = \frac{dQ}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \rho dv$$

式中 $d\mathbf{S}$ 的单位法向矢量指向封闭面外。上式两端被 Δv 相除，有

$$\frac{\oint \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\int \rho dv}{\Delta v}$$

当 $\Delta v\rightarrow 0$ 时，由定义，左边趋向电流密度的散度 $\nabla\cdot\mathbf{J}$，而右边趋向 $-\partial\rho/\partial t$。因此

$$\nabla\cdot\mathbf{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

上式就是电流**连续性方程**。在方程里，ρ 不仅仅代表移动电荷密度，而且还代表**净电荷**密度。下面将说明 $\partial\rho/\partial t$ 在导体内部仅瞬间可能不为零。这样从电流连续性方程可得 $\nabla\cdot\mathbf{J}=0$，它是基尔霍夫电流定律的等价场方程，该方程表明流出几个导体的连接点处的净电流为零。

在导电过程中，价电子在电场作用下自由移动，从某种程度上讲，这些电子在运动之中，不存在静态条件。然而，这些电子不应同**净电荷**混淆，因为每个导电电子被原子核中的质子相平衡，这样在材料中每一个 Δv 内净电荷为零。假设在 $t=0$ 时，在固态导体内某暂时不平衡区域内有一净电荷密度 ρ_0，那么由 $\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}=(\sigma/\varepsilon)\mathbf{D}$，得

$$\nabla\cdot\frac{\sigma}{\varepsilon}\mathbf{D} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

散度运算是关于空间坐标的运算。如果 σ 和 ε 是常数，就表明是均匀的材料，这样它们可以从偏导数中移出来：

$$\frac{\sigma}{\varepsilon}(\nabla\cdot\mathbf{D}) = -\frac{\partial\rho}{\partial t}, \qquad \frac{\sigma}{\varepsilon}\rho = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

或
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon}\rho = 0$$

这个方程的解是

$$\rho = \rho_0 e^{-(\sigma/\varepsilon)t}$$

可见 ρ 按指数规律衰减，其**时间常数** $\tau=\varepsilon/\sigma$ 也称**弛豫时间**。在 $t=\tau$ 时，ρ 衰减到初值的 36.8%。对于导体，τ 是非常小的，为 10^{-19} 数量级。这证实了在导体内没有**自由电荷**，而电荷

分布于导体表面。

例 6 确定银的弛豫时间，已知 $\sigma=6.17\times10^7$S/m。如果密度为 ρ_0 的电荷放于银块内，求一个和五个时间常数后的 ρ。

解 由于 $\varepsilon\approx\varepsilon_0$，可知

$$\tau=\frac{\varepsilon}{\sigma}=\frac{10^{-9}36\pi}{6.17\times10^7}=1.43\times10^{-19}\text{ s}$$

因此

$$\text{当 } t=\tau \text{ 时,}\quad \rho=\rho_0e^{-1}=0.368\rho_0$$
$$\text{当 } t=5\tau \text{ 时,}\quad \rho=\rho_0e^{-5}=6.74\times10^{-3}\rho_0$$

6.10 导体-电介质的边界条件

在静态条件下，所有净电荷都分布在导体外表面，因此在导体内 **E** 和 **D** 均为零。因为电场是保守场，$\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$ 的线积分沿任何闭合路径都为零。图 6-11 显示了一个有 1、2、3、4 四个角的矩形路径。此时

$$\int_1^2\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}+\int_2^3\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}+\int_3^4\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}+\int_4^1\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$$

如果从 2 到 3 和从 4 到 1 的路径长度趋于零，且保持它们之间的交界面不变，那么第二和第四个积分成为零。从 3 到 4 的路径在导体内，路径上的 **E** 必须是零。这就剩下

$$\int_1^2\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\int_1^2E_tdl=0$$

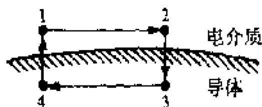


图 6-11

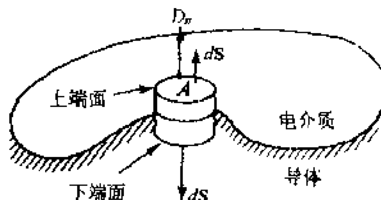


图 6-12

式中 E_t 是电介质表面处 **E** 的切向分量。由于从 1 到 2 的路径可以任意选择，所以在表面上的每一点处有

$$E_t=0 \quad 且 \quad D_t=0$$

为了找出法向分量满足的边界条件，如图 6-12 所示，在穿过交界面处放置一个小的封闭的直圆柱。对这个圆柱面使用高斯定理得

$$\oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}=Q_{封闭面内}$$

或

$$\int_{上端面}\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}+\int_{下端面}\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}+\int_{侧面}\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}=\int_A\rho_sdS$$

可以确定第三个积分是零，在交界面两侧 $D_t=0$。由于圆柱下端面位于导体内，所以面上的 **D** 和 **E** 是零，故第二个积分也是零。从而有

$$\int_{上端面}\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}=\int_{上端面}D_ndS=\oint_A\rho_sdS$$

由上式得

$$D_n=\rho_s \quad 和 \quad E_n=\frac{\rho_s}{\epsilon}$$

例 7 已知导体表面某点电场强度为 $\mathbf{E}=0.2\,\mathbf{a}_x-0.3\,\mathbf{a}_y-0.2\,\mathbf{a}_z$(V/m)。求该点的面电荷密度。

解 设导体处于自由空间中，则

$$D_n = \varepsilon_0 E_n = \rho_s$$

$$E_n = \pm |\mathbf{E}| = \pm 0.412 \text{ V/m}$$

$$\rho_s = \left(\frac{10^{-9}}{36\pi}\right)(\pm 0.412) = \pm 3.64 \text{ pC/m}^2$$

符号由给定点处面的外法线方向确定。

总之，在静态条件下，当不存在面电荷时，导体外的场为零（切向和法向分量）。需要说明的是，面电荷并不意味着导体内的净电荷。为了说明这点，考虑球坐标系中原点处的一个正电荷。如果这个点电荷被有限厚度的**不带电荷**的导电球壳所包围，如图 6-13(a)所示，则导体外的场由下式给出：

$$\mathbf{E} = \frac{+Q}{4\pi\varepsilon r^2}\mathbf{a}_r$$

而导体内部 $\mathbf{E}$ 为零。由 $+Q$ 产生的库仑力将导电电子吸引到球壳的内表面上产生负号的 ρ_{s1}，而外表面因缺乏电子而形成正电荷密度 ρ_{s2}。电通量线 Ψ 从点电荷 $+Q$ 出发终止于导体球壳内表面的电子，如图 6-13(b)所示。在球壳外，电通量线 Ψ 又从导体外表面的正电荷出发终止于无限远处。应当注意通量不穿过导体且导体上的净电荷为零。

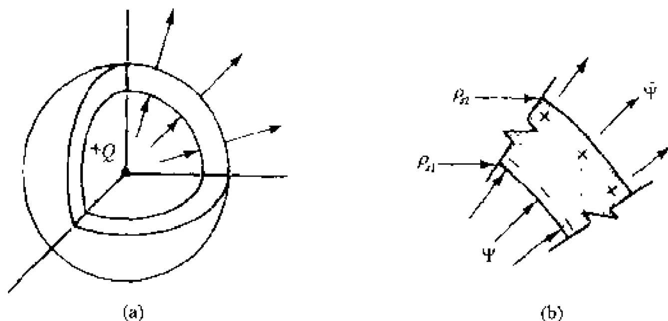


图 6-13

习 题 求 解

6.1 #12 铜导线（美国线规）的直径为 80.8 密耳（1 密耳 = 10^{-3} 英寸）。在一段 50 英尺长的该导线中流过 20A 的电流。求电场强度 E、漂移速度 U、电压降和该段导线的电阻。

由于 1 密耳是 $\frac{1}{1000}$ 英寸，横截面积是

$$A = \pi\left[\left(\frac{0.0808 \text{ in}}{2}\right)\left(\frac{2.54\times10^{-2}\text{ m}}{1\text{ in}}\right)\right]^2 = 3.31\times10^{-6}\text{ m}^2$$

则

$$J = \frac{I}{A} = \frac{20}{3.31\times10^{-6}} = 6.04\times10^6 \text{ A/m}^2$$

对于铜线，$\sigma = 5.8\times10^7$ S/m，从而有

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{6.04\times10^6}{5.8\times10^7} = 1.04\times10^{-1}\text{ V/m}$$

$$V = El = (1.04\times10^{-1})(50)(12)(0.0254) = 1.59\text{ V}$$

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1.59}{20} = 7.95\times10^{-2}\ \Omega$$

铜中的电子迁移率为 $\mu = 0.0032\text{m}^2/(\text{V}\cdot\text{s})$，且由于 $\sigma = \rho\mu$，所以电荷密度为

$$\rho = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{5.8\times10^7}{0.0032} = 1.81\times10^{10}\text{ C/m}^3$$

再由 $J = \rho U$ 可得漂移速度为

$$U = \frac{J}{\rho} = \frac{6.05\times10^6}{1.81\times10^{10}} = 3.34\times10^{-4}\text{ m/s}$$

根据这一漂移速度可知，在＃12 铜导线中电子移动 1cm 的距离大约需要 30s。

6.2　在铝中，当漂移速度为 5.3×10^{-4}m/s 时的电流密度和电场强度是多少？

对于铝，电导率为 $\sigma=3.82\times10^{7}$S/m，迁移率为 $\mu=0.0014\text{m}^2/(\text{V}\cdot\text{s})$，所以

$$J=\rho U=\frac{\sigma}{\mu}U=\frac{3.83\times10^{7}}{0.0014}(5.3\times10^{-4})=1.45\times10^{7}\ \text{A/m}^2$$

$$E=\frac{J}{\sigma}=\frac{U}{\mu}=3.79\times10^{-1}\ \text{V/m}$$

6.3　有一个直径为 3.0mm 圆形横截面铜导线，其中通以 10A 的电流。求每秒离开（被其他电子代替）100mm 长导线的电子与该段导线的总电子数的百分率为多少？

阿伏伽德罗常量是 $N=6.02\times10^{26}$原子/kmol。铜的比重为 8.96，原子量为 63.54。假设每个原子中有一个导电电子，每单位体积内电子数是

$$N_e=\left(6.02\times10^{26}\ \frac{\text{原子}}{\text{kmol}}\right)\left(\frac{1\text{kmol}}{63.54\text{kg}}\right)\left(8.96\times10^{3}\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)\left(1\ \frac{\text{电子}}{\text{原子}}\right)$$

$$=8.49\times10^{28}\ \text{电子/m}^3$$

在 100mm 长的导线内电子数是

$$N=\pi\left(\frac{3\times10^{-3}}{2}\right)^2(0.100)(8.49\times10^{28})=6.00\times10^{22}$$

10A 电流需要电子的通过速率为

$$\left(10\ \frac{\text{C}}{\text{s}}\right)\left(\frac{1}{1.6\times10^{-19}}\ \frac{\text{电子}}{\text{C}}\right)=6.25\times10^{19}\ \text{电子/s}$$

从而，每秒离开 100mm 导线的电子百分率是

$$\frac{6.25\times10^{19}}{6.00\times10^{22}}(100)=0.104\%/\text{s}$$

6.4　如果 1 立方厘米铝中的全部导电电子在 2.0s 内通过一个特定点，那么电流为多少？假设每个原子中有一个导电电子。

铝的密度为 $2.70\times10^{3}\text{kg/m}^3$，原子量为 26.98kg/kmol，则

$$N_e=(6.02\times10^{26})\left(\frac{1}{26.98}\right)(2.70\times10^{3})=6.02\times10^{28}\ \text{电子/m}^3$$

和

$$I=\frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

$$=\frac{(6.02\times10^{28}\ \text{电子/m}^3)(10^{-2}\text{m})^3(1.6\times10^{-19}\text{C/电子})}{2\text{s}}=4.82\ \text{kA}$$

6.5　在迁移率为 $0.0046\text{m}^2/(\text{V}\cdot\text{s})$、电导率为 29.1 MS/m 的金属中，自由电子的密度是多少？

由于 $\sigma=\mu\rho$，所以

$$\rho=\frac{\sigma}{\mu}=\frac{29.1\times10^{6}}{0.0046}=6.33\times10^{9}\ \text{C/m}^3$$

和

$$N_e=\frac{6.33\times10^{9}}{1.6\times10^{-19}}=3.96\times10^{28}\ \text{电子/m}^3$$

6.6　求 300K 时 n 型锗的电导率，设在每 10^8 个原子中有一个施主原子。锗的密度为 $5.32\times10^{3}\text{kg/m}^3$，原子量为 72.6kg/kmol。

在 n 型半导体材料中的载流子是电子。由于 1kmol 物质中含 6.02×10^{26} 个原子，可得载流子密度为

$$N_e=\left(6.02\times10^{26}\ \frac{\text{原子}}{\text{kmol}}\right)\left(\frac{1\text{kmol}}{72.6\text{kg}}\right)\left(5.32\times10^{3}\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)\left(\frac{\text{电子}}{10^8\ \text{原子}}\right)$$

$$=4.41\times10^{20}\ \text{电子/m}^3$$

300K 时，锗的本征浓度 n_i 是 $2.5\times10^{19}\text{m}^{-3}$。由质量作用定律可知，$N_eN_h=n_i^2$，所以空穴密度为

$$N_h=\frac{(2.5\times10^{19})^2}{4.41\times10^{20}}=1.42\times10^{18}\ \text{空穴/m}^3$$

因为 $N_e\gg N_h$，电导率由释放的电子决定，所以 300K 时的电导率为

$$\sigma\approx N_ee\mu_e=(4.41\times10^{20})(1.6\times10^{-19})(0.38)=26.8\ \text{S/m}$$

6.7 有一长为 150m 的导线，它的横截面处处均匀，在其两端加 1.3V 的电压，且电流密度为 $4.65\times10^5\,A/m^2$。求该导线材料的电导率。

解 由于 $E=V/l$ 和 $J=\sigma E$，所以

$$4.65\times10^5=\sigma\left(\frac{1.3}{150}\right)\quad 或\quad \sigma=5.37\times10^7\ S/m$$

6.8 由电阻率表中查得经锻烧过的铜的电阻率为 10.4 欧姆·圆密耳每英尺，求电导率（单位：S/m）。

解 1 圆密耳是直径为 1 密耳的圆面积（1 密耳 $=10^{-3}$ 英寸），即

$$1\,圆密耳=\pi\left[\left(\frac{10^{-3}\,in}{2}\right)\left(0.0254\,\frac{m}{in}\right)\right]^2=5.07\times10^{-10}\,m^2$$

电导率是电阻率的倒数

$$\sigma=\left(\frac{1}{10.4}\,\frac{英尺}{欧姆\cdot圆密耳}\right)\left(12\,\frac{英寸}{英尺}\right)\left(0.0254\,\frac{米}{英寸}\right)\left(\frac{1\,圆密耳}{5.07\times10^{-10}\,米^2}\right)$$
$$=5.78\times10^7\,S/m$$

6.9 #20 铝线（美国线规）每 1000 英尺有 16.7 欧姆的电阻。此时铝的电导率是多少？

解 查阅美国线规表，#20 线的直径为 32 密耳，从而

$$A=\pi\left[\frac{32\times10^{-3}}{2}(0.0254)\right]^2=5.19\times10^{-7}\,m^2$$

$$l=(1000\,英尺)(12\,英寸/英尺)(0.0254\,米/英寸)=3.05\times10^2\,m$$

由 $R=l/\sigma A$，得

$$\sigma=\frac{3.05\times10^2}{(16.7)(5.19\times10^{-7})}=35.2\ MS/m$$

6.10 在半径为 2mm 的圆柱导体中，电流密度随着离开轴的距离而变化，即

$$J=10^3e^{-400r}\ (A/m^2)$$

求总电流 I。

解

$$I=\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}=\int JdS=\int_0^{2\pi}\int_0^{0.002}10^3e^{-400r}rdrd\varphi$$
$$=2\pi(10^3)\left[\frac{e^{-400r}}{(-400)^2}(-400r-1)\right]_0^{0.002}=7.51\ mA$$

6.11 求在平面 $y=0$ 内，穿过区域 $-0.1\leqslant x\leqslant0.1$m 和 $-0.002\leqslant z\leqslant0.002$m 的电流，设

$$\mathbf{J}=10^2\,|x|\,\mathbf{a}_y\ (A/m^2)$$

解

$$I=\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}=\int_{-0.002}^{0.002}\int_{-0.1}^{0.1}10^2\,|x|\,\mathbf{a}_y\cdot dxdz\mathbf{a}_y=4\ mA$$

6.12 求在平面 $x=0$ 内，穿过区域 $-\pi/4\leqslant y\leqslant\pi/4$m 和 $-0.01\leqslant z\leqslant0.01$m 的电流，设

$$\mathbf{J}=100\cos2y\ \mathbf{a}_x\ (A/m^2)$$

解

$$I=\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}=\int_{-0.01}^{0.01}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}100\cos2y\ \mathbf{a}_x\cdot dydz\ \mathbf{a}_x=2.0\ A$$

6.13 已知在球坐标系中，$\mathbf{J}=10^3\sin\theta\ \mathbf{a}_r\ (A/m^2)$，求穿过 $r=0.02$m 的球壳的电流。

解 由于 $\mathbf{J}$ 和

$$d\mathbf{S}=r^2\sin\theta d\theta d\varphi\mathbf{a}_r$$

均是径向的，所以

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}10^3(0.02)^2\sin^2\theta d\theta d\varphi=3.95\ A$$

6.14 说明截面积为常数 A、长为 l 的任何导线的电阻可由 $R=l/\sigma A$ 确定，假设电流均匀分布。

解 在长为 l、横截面为常数的导线中产生恒定电场 E，电压降是

$$V=\int\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=El$$

如果在整个面积 A 内电流是均匀分布的，则

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = JA = \sigma EA$$

式中 σ 是电导率。这样由 $R = V/I$，可得

$$R = \frac{l}{\sigma A}$$

6.15 确定长为 l 的同轴电缆的绝缘电阻，如图 6-14 所示。

设由内导体到外导体的总电流为 I，则在径向距离 r 处，有

$$J = \frac{I}{A} = \frac{I}{2\pi rl}, \qquad E = \frac{I}{2\pi\sigma rl}$$

两导体之间的电压降为

$$V_{ab} = -\int_b^a \frac{I}{2\pi\sigma rl} dr = \frac{I}{2\pi\sigma l} \ln \frac{b}{a}$$

电阻是

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma l} \ln \frac{b}{a}$$

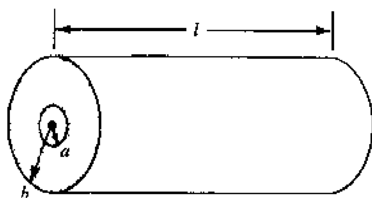


图 6-14

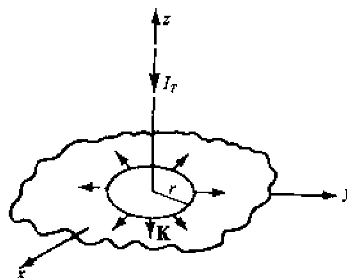


图 6-15

6.16 在平面 $z=0$ 内，有一宽为 4m 的电流面，电流的方向从原点流向点(1,3,0)m，总电流为 10A。求 **K** 的表达式。

在电流面上的每一点处，**K** 的方向为单位矢量

$$\frac{\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y}{\sqrt{10}}$$

K 的大小是 $\frac{10}{4}$ A/m，从而

$$\mathbf{K} = \frac{10}{4}\left(\frac{\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y}{\sqrt{10}}\right) \text{A/m}$$

6.17 如图 6-15 所示，一电流 I_T 沿 z 轴流过一细线，进入 $z=0$ 处的簿导电平面。试表示这个面电流密度 **K**。

考虑平面 $z=0$ 内的一个圆环，电流 I_T 在面上通过 $2\pi r$ 的圆周均匀扩散，**K** 的方向沿 $\mathbf{a}_r$，所以

$$\mathbf{K} = \frac{I_T}{2\pi r}\mathbf{a}_r$$

6.18 对于习题 6.17 中的电流面，求平面上 30°的区域内的电流(图 6-16)。

$$I = \int K_n dl = \int_0^{\pi/6} \frac{I_T}{2\pi r} r d\phi = \frac{I_T}{12}$$

由于在区域内电流均匀分布，所以也可以不通过积分直接得出电流为总量的 30°/360°或 1/12。

6.19 如图 6-17 所示，电流 I(A)从一簿直圆柱顶端流入，如果圆柱半径是 2cm，试求出 **K** 的表达式。

在顶部，电流均匀通过任意周长为 $2\pi r$ 的圆环，因此

$$\mathbf{K} = \frac{I}{2\pi r}\mathbf{a}_r \text{(A/m)}$$

在侧面，电流均匀通过周长为 $2\pi(0.02\text{m})$ 圆周，因此

$$\mathbf{K} = \frac{I}{0.04\pi}(-\mathbf{a}_z)\ (\text{A/m})$$



图 6-16

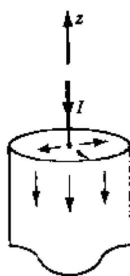


图 6-17

6.20 一半径为 0.05m 的圆柱导体，其轴线与 z 轴重合，在该导体面上面电荷密度为 $\rho_s = \rho_0/z$ (C/m^2)。试写出导体表面处 $\mathbf{E}$ 的表达式。

解 由于 $D_n = \rho_s$，所以 $E_n = \rho_s/\epsilon_0$。在点 $(0.05, \varphi, z)$ 处，有

$$\mathbf{E} = E_n \mathbf{a}_r = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 z}\mathbf{a}_r\ (\text{V/m})$$

6.21 存在于区域 $x \geqslant 5$ 中的导体有一面电荷密度

$$\rho_s = \frac{\rho_0}{\sqrt{y^2 + z^2}}$$

试写出导体外侧 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{D}$ 的表达式。

解 外法线是 $-\mathbf{a}_x$，在导体外侧，有

$$\mathbf{D} = D_n(-\mathbf{a}_x) = \rho_s(-\mathbf{a}_x) = \frac{\rho_0}{\sqrt{y^2 + z^2}}(-\mathbf{a}_x)$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0\sqrt{y^2 + z^2}}(-\mathbf{a}_x)$$

6.22 两同心圆柱导体，半径为 $r_a = 0.01\text{m}$ 和 $r_b = 0.08\text{m}$，表面分别分布有电荷密度 $\rho_{sa} = 40\ \text{pC/m}^2$ 和 ρ_{sb}，$\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{E}$ 存在于两圆柱面之间，其他地方为零，见图 6-18。求 ρ_{sb} 并写出两圆柱面之间 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{E}$ 的表达式。

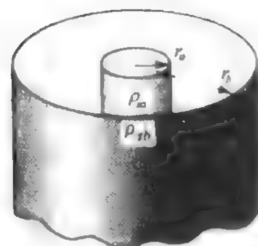


图 6-18

解 由对称性可知，两圆柱之间的场必沿径向且仅是 r 的函数。对于 $r_a < r < r_b$，有

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rD_r) = 0 \quad 或 \quad rD_r = c$$

为求常数 c，利用在 $r = r_a + 0$ 处，$D_n = D_r = \rho_{sa}$，得

$$c = (0.01)(40 \times 10^{-12}) = 4 \times 10^{-13}\ \text{C/m}$$

因此

$$\mathbf{D} = \frac{4 \times 10^{-13}}{r}\mathbf{a}_r\ (\text{C/m}^2) \quad 和 \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} = \frac{4.52 \times 10^{-2}}{r}\mathbf{a}_r\ (\text{V/m})$$

密度 ρ_{sb} 可从下式求得

$$\rho_{sb} = D_n|_{r=r_b-0} = -D_r|_{r=r_b-0} = -\frac{4 \times 10^{-13}}{0.08} = -5\ \text{pC/m}^2$$

补 充 习 题

6.23 求铝中导电电子的迁移率，已知电导率为 38.2MS/m 和导电电子密度为 $1.70 \times 10^{29}\text{m}^{-3}$。

答案：$1.40 \times 10^{-3}\text{m}^2/(\text{V}\cdot\text{s})$

6.24 重求习题 6.23，(a)对于铜，$\sigma = 58.0\text{MS/m}$ 和 $N_e = 1.13 \times 10^{29}\text{m}^{-3}$；(b)对于银，$\sigma = 61.7\text{MS/m}$ 和 $N_e = 7.44$

$\times 10^{28}\mathrm{m}^{-3}$。

答案：(a)$3.21\times10^{-3}\mathrm{m}^2/(\mathrm{V\cdot s})$；(b)$5.18\times10^{-3}\mathrm{m}^2/(\mathrm{V\cdot s})$

6.25 求 p 型锗的空穴密度 N_h，这里 $\sigma=10^4\mathrm{S/m}$，空穴迁移率 $\mu_h=0.18\mathrm{m}^2/(\mathrm{V\cdot s})$。

答案：$3.47\times10^{23}\mathrm{m}^{-3}$

6.26 利用习题 6.25 的数据，求电子的密度 N_e，设本征密度 $n_i=2.5\times10^{19}\mathrm{m}^{-3}$。

答案：$1.80\times10^{15}\mathrm{m}^{-3}$

6.27 分别求 n 型硅中电子和空穴的密度，其中 $\sigma=10.0\ \mathrm{S/m}$，$\mu_e=0.13\ \mathrm{m}^2/(\mathrm{V\cdot s})$和 $n_i=1.5\times10^{16}\mathrm{m}^{-3}$。

答案：$4.81\times10^{20}\mathrm{m}^{-3}$，$4.68\times10^{11}\mathrm{m}^{-3}$

6.28 确定 $1\mathrm{m}^3$ 钨中传导电子的数目，其密度是 $18.8\times10^3\mathrm{kg/m}^3$，原子量是 184.0，设每个原子有两个传导电子。

答案：1.23×10^{29}

6.29 求 $1\mathrm{m}^3$ 铜中传导电子的数目，如果 $\sigma=58\ \mathrm{MS/m}$ 和 $\mu=3.2\times10^{-3}\ \mathrm{m}^2/(\mathrm{V\cdot s})$。平均每个原子中有多少个电子？铜的原子量是 63.54，密度是 $8.96\times10^3\mathrm{kg/m}^3$。

答案：1.13×10^{29}，1.33

6.30 铜棒的长为 2.0m，横截面是面积为 $0.02\mathrm{m}\times0.08\mathrm{m}$ 的矩形，在两端加 50mV 的电压。求电阻、电流、电流密度、电场强度和传导电子漂移速度。

答案：$21.6\ \mu\Omega$，2.32 kA，$1.45\ \mathrm{MA/m}^2$，25 mV/m，0.08 mm/s

6.31 长为 3m 的铝母线的横截面是 $0.01\mathrm{m}\times0.07\mathrm{m}$ 的矩形，其中通有 300A 的电流。求电场强度、电流密度和传导电子的漂移速度。

答案：1.12×10^{-2} V/m，$4.28\times10^5\ \mathrm{A/m}^2$，$1.57\times10^{-5}$ m/s

6.32 由线表查得美国线规 #20铜线在 20°时的电阻为 33.31Ω/km。求铜的电导率(单位：S/m)。美国线规 #20的直径是 32 密耳。

答案：$5.8\times10^7\mathrm{S/m}$

6.33 由线表查得美国线规 #18 铂线的电阻为 $1.21\times10^{-3}\ \Omega/\mathrm{cm}$。求铂的电导率(单位：S/m)。美国线规 #18 的直径是 40 密耳。

答案：$1.00\times10^7\mathrm{S/m}$

6.34 具有 0.0172 Ω/cm 的电阻的美国线规 #32 钨的电导率是多少？美国线规 #32 的直径为 8.0 密耳。

答案：17.9 MS/m

6.35 中空圆柱铝导体外径为 32mm，壁厚为 6mm，确定该导体每米长的电阻。

答案：$53.4\ \mu\Omega/\mathrm{m}$

6.36 求厚度为 1.0 密耳、边长为 5.0cm 的正方形铝箔在下列情况下的电阻：(a)在一个正方形面内两个正相对的棱边之间，(b)两个正方形面之间。

答案：(a)1.03 mΩ；(b)266 pΩ

6.37 分别求 100 英尺长的美国线规 #4/0 铜和铝导体的电阻。美国线规 #4/0 的直径为 460 密耳。

答案：4.91 mΩ，7.46 mΩ

6.38 圆形横截面、长为 2m 的铜导体，当一端半径为 1mm，而另一端半径从 1mm 线性地增加到 5mm 时，确定其电阻。

答案：2.20 mΩ

6.39 正方形横截面、长为 1m 的铜导体，当一端正方形边长为 1mm，而另一端边长从 1mm 线性地增加到 3mm 时，确定其电阻。

答案：5.75 mΩ

6.40 长为 l 的导体，如果保持其横截面的形状不变，截面积从 A 线性地增加到 kA，试导出电阻的表达式。

答案：$\dfrac{l}{\sigma A}\left(\dfrac{\ln k}{k-1}\right)$

6.41 在直径为 81 密耳的美国线规 #12 导体中通过 30A 电流时，求该导体中的电流密度。

答案：$9.09\times10^6\mathrm{A/m}^2$

6.42 求半径为 2mm 的圆形导体中的总电流，设电流密度为 $J=10^3/r\ (\mathrm{A/m}^2)$。

答案：$4\pi A$

6.43 在圆柱坐标系的区域 $0.01\leqslant r\leqslant0.02\mathrm{m}$、$0\leqslant z\leqslant1\mathrm{m}$ 中，$\mathbf{J}=10e^{-100r}\mathbf{a}_\varphi(\mathrm{A/m}^2)$。求通过该区域与半平面 φ

$=\text{const}$ 相交区域的总电流。

答案：$2.33\times10^{-2}\text{A}$

6.44 已知球坐标系中电流密度为

$$\mathbf{J}=\left(\frac{10^3}{r^2}\cos\theta\right)\mathbf{a}_\theta\ (\text{A/m}^2)$$

求穿过圆锥形区域 $\theta=\pi/4$、$0.001\leqslant r\leqslant0.080\text{m}$ 的电流。

答案：$1.38\times10^4\text{A}$

6.45 边长为 1m 的立方体，一个角位于原点，各边平行于坐标轴，如果 $\mathbf{J}=2x^2\mathbf{a}_x+2xy^3\mathbf{a}_y+2xy\,\mathbf{a}_z\ (\text{A/m}^2)$，求从此立方体向外流出的总电流。

答案：3.0A

6.46 如图 6-19 所示，50A 的电流沿 z 轴流入一个半径为 0.03m 的薄球壳，电流在 $\theta=\pi/2$ 处进入一个平面。试写出球壳和平面内电流面密度 $\mathbf{K}$ 的表达式。

答案：$\dfrac{265}{\sin\theta}\ \mathbf{a}_\theta\ (\text{A/m})$，$\dfrac{7.96}{r}\ \mathbf{a}_r\ (\text{A/m})$

6.47 大小为 I(A) 的线电流沿 z 轴流到 $z=5\times10^{-2}\text{m}$ 处，然后进入半径为 $5\times10^{-2}\text{m}$ 的球壳的 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/4$ 部分，求此面中的电流面密度 $\mathbf{K}$。

答案：$\dfrac{80I}{\pi\sin\theta}\ \mathbf{a}_\theta\ (\text{A/m})$

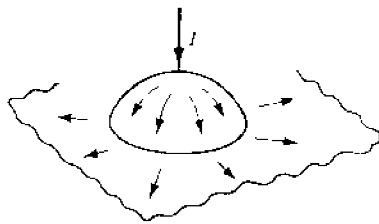


图 6-19

6.48 密度为 $\mathbf{K}=20\mathbf{a}_z$ A/m 的电流面位于平面 $x=0$ 内，同时电流密度为 $\mathbf{J}=10\,\mathbf{a}_z\ \text{A/m}^2$ 的电流也分布在整个空间。(a)求通过平面 $z=0$ 内、中心在原点、半径为 0.5m 的圆面的电流。(b)求流过平面 $z=0$ 内，由 $|x|\leqslant0.25\text{m}$、$|y|\leqslant0.25\text{m}$ 限定的正方形区域的电流。

答案：(a)27.9A；(b)12.5A

6.49 在一个中空、壁薄、0.01m×0.02m 的矩形导体内流过沿 x 轴正向的电流 10A，试表示出 $\mathbf{K}$。

答案：$167\mathbf{a}_x$ A/m

6.50 一个固态导体包含原点，其表面为 $x+y=3\text{m}$。表面处的电场强度是 0.35V/m。试分别求出表面上的 $\mathbf{E}$、$\mathbf{D}$ 和 ρ_s。

答案：$\pm0.247(\mathbf{a}_x+\mathbf{a}_y)$ V/m，$\pm2.19\times10^{-12}(\mathbf{a}_x+\mathbf{a}_y)\ \text{C/m}^2$，$\pm3.10\times10^{-12}\ \text{C/m}^2$

6.51 一个导体延伸到区域 $z<0$，该导体的一个面位于平面 $z=0$ 内，用圆柱坐标表示该面内的面电荷密度为

$$\rho_s=5\times10^{-10}e^{-10r}\sin^2\varphi\ (\text{C/m}^2)$$

求点$(0.15\text{m},\pi/3,0)$处的电场强度。

答案：$9.45\ \mathbf{a}_z$ V/m

6.52 中心在原点、半径为 3m 的球形导体表面上分布有面密度为 $\rho_s=\rho_0\cos^2\theta$ 的电荷，求表面上的 $\mathbf{E}$。

答案：$\dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}\cos^2\theta\ \mathbf{a}_r$

6.53 已知导体表面上某点的电场强度为 $\mathbf{E}=0.2\mathbf{a}_x-0.3\mathbf{a}_y-0.2\mathbf{a}_z$ V/m，在该点处面电荷密度是多少？

答案：$\pm3.65\ \text{pC/m}^2$

6.54 在球坐标系中，球心在原点的球形导体表面上的电场强度为 $\mathbf{E}=0.53(\sin^2\varphi)\ \mathbf{a}_r$ V/m，球形导体与 y 轴相交处的电荷密度是多少？

答案：$4.69\ \text{pC/m}^2$

第7章 电容和电介质

7.1 极化强度 P 和相对介电常量 ε_r

电介质在电场中被极化后，其中的电通量密度 **D** 比同一场强下自由空间中的大。如图 7-1(a)所示，通过把电介质的原子视为重叠的正负电荷区，可以得到简单且令人满意的极化理论。在外加电场 **E** 的作用下，正电荷区沿所加电场的方向移动，负电荷区朝相反方向移动。这种位移可用**电偶极矩** $\mathbf{p} = Q\mathbf{d}$ 描述，如图 7-1(c)所示。

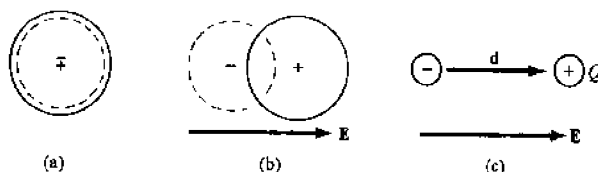


图 7-1

对于大部分物质，外加场撤去后，电荷区将返回到它们原始的重叠位置，就像弹簧遵守胡克定律一样，一旦系统返回原始状态，变形就可以恢复。电荷区的移动和弹簧一样都有能量储存。

Δv 体积的极化电介质内有 N 个偶极矩 **p**。极化强度 **P** 定义为每单位体积内的偶极矩：

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{N\mathbf{P}}{\Delta v} \quad (\mathrm{C/m^2})$$

这表明在整个区域内，电偶极矩的分布是平滑且连续的，但实际情况并非如此。然而，宏观上利用以下关于极化强度 **P** 的方程可以解释电通量密度的增加，即

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

这个方程允许 **E** 和 **P** 具有不同的方向，就像它们在一定的晶状电介质中那样。在各向同性的线性物质中，**E** 和 **P** 在每一点处都是同方向的，这可表示为

$$\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} \qquad (\text{各向同性物质})$$

式中**电极化率** χ_e 是无量纲常数。于是

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e)\mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \quad (\text{各向同性物质})$$

式中 $\varepsilon_r \equiv 1 + \chi_e$ 也是一个纯数。由于 $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$(3.4 节)，可知

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

所以 ε_r 被称为**相对介电常量**(参照 2.1 节)。

例 1 在 $E = 0.15\ \mathrm{MV/m}$ 和 $\chi_e = 4.25$ 的电介质中求 **D** 和 **P** 的大小。

解 由于 $\varepsilon_r = \chi_e + 1 = 5.25$，所以

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E = \frac{10^{-9}}{36\pi}(5.25)(0.15 \times 10^6) = 6.96\ \mu\mathrm{C/m^2}$$

$$P = x_e \varepsilon_0 E = \frac{10^{-9}}{36\pi}(4.25)(0.15 \times 10^6) = 5.64\ \mu\mathrm{C/m^2}$$

7.2 电容

任何两个被自由空间或电介质分开的导电体之间都有电容，外加的电位差导致一个导体上带 $+Q$ 的电荷，另一个导体带 $-Q$ 的电荷。电量的绝对值与电位差的绝对值之比被定义为

系统的电容：

$$C = \frac{Q}{V}\ (\mathrm{F})$$

式中 1 F（法拉）= 1C/V。

电容仅由系统的几何形状、尺寸以及所涉及到的电介质的性质所决定。图 7-2 给出了导体 1 上带 $+Q$ 的电荷和导体 2 上带 $-Q$ 的电荷共同产生的通量场，它们建立了场 **D** 和场 **E**。电荷增加一倍，**D** 和 **E** 也增加一倍，相应地电位差也增加一倍。因此，Q/V 的值保持不变。

例 2 求图 7-3 中的平行板之间的电容，忽略边缘效应。

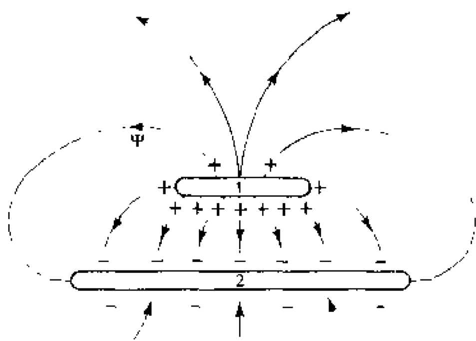


图 7-2

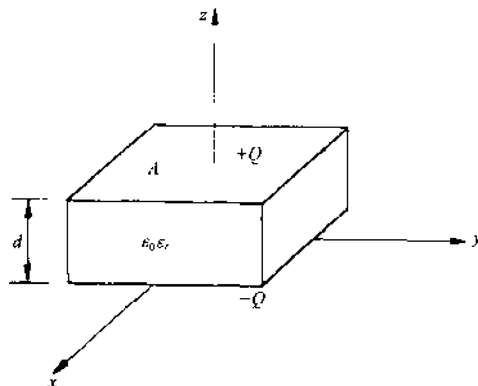


图 7-3

解 假定上板的总电荷为 $+Q$，下板的总电荷为 $-Q$。通常，平板上分布的电荷在边缘处具有较高的密度。忽略边缘效应，问题将得到简化，假定平板上的均匀电荷密度为 $\rho_s = \pm Q/A$。两板之间的 **D** 是均匀的，方向从 $+\rho_s$ 指向 $-\rho_s$，从而有

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{A}(-\mathbf{a}_z), \qquad \mathbf{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}(-\mathbf{a}_z)$$

上板相对于下板的电位可用 5.3 节中的方法得到：

$$V = -\int_0^d \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}(-\mathbf{a}_z)\cdot(dz\ \mathbf{a}_z) = \frac{Qd}{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}$$

于是 $C = Q/V = \varepsilon_0 \varepsilon_r A/d$。注意该结果并不取决于平板的形状，而取决于平板的面积、两板的间距以及两板之间的电介质。

7.3 多种电介质电容器

如图 7-4(a)所示，当电容器中存在两种电介质且它们的分界面与 **E** 和 **D** 平行时，可以把这种结构视为两个电容器并联以获得它们的等值电容（图 7-4(b)）。即

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} A_1}{d}, \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} A_2}{d}$$

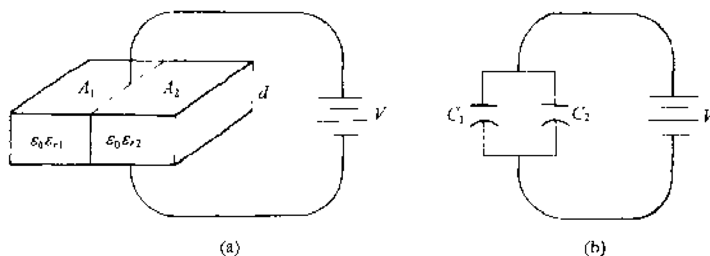


图 7-4

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0}{d}(\varepsilon_{r1}A_1 + \varepsilon_{r2}A_2)$$

当存在两种电介质使得 **D** 和 **E** 同时垂直于它们的分界面，如图 7-5(a)所示，可以把这种结构视为两个电容器串联来获得它们的等值电容[图 7-5(b)]。即

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}A}{d_1}, \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}A}{d_2}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{\varepsilon_{r2}d_1 + \varepsilon_{r1}d_2}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}A}$$

这个结论可以扩展到任意多种电介质，即若 **D** 和 **E** 同时垂直于它们的分界面，则等值电容的倒数是各个电容倒数之和。

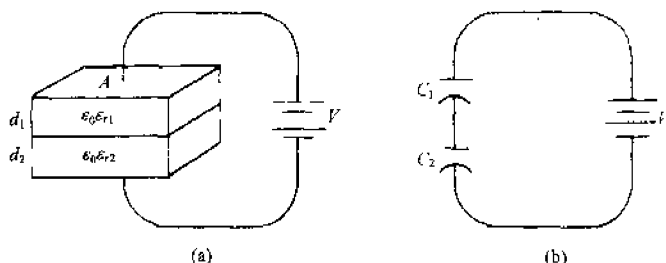


图 7-5

例 3　面积为 0.30m^2，间距为 5.5mm 的平行板电容器含有如下三种电介质：$\varepsilon_{r1}=3.0, d_1=1.0\text{mm}$；$\varepsilon_{r2}=4.0, d_2=2.0\text{mm}$；$\varepsilon_{r3}=6.0, d_3=2.5\text{mm}$。**E** 和 **D** 均垂直于它们的分界面。求电容。

解　每种电介质可认为构成了三个串联电容器中的一个。由于

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}A}{d_1} = \frac{\varepsilon_0(3.0)(0.30)}{10^{-3}} = 7.96\ \text{nF}$$

同理，$C_2=5.31$ nF，$C_3=6.37$ nF，所以

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{7.96\times10^{-9}} + \frac{1}{5.31\times10^{-9}} + \frac{1}{6.37\times10^{-9}} \quad \text{或} \quad C_{eq} = 2.12\ \text{nF}$$

7.4　电容器中储存的能量

根据 5.8 节，电容器的电场中储存的能量为

$$W_E = \frac{1}{2}\int \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}dv$$

式中的积分包含导体之间的空间，忽略边缘效应。如果这个空间内含有相对介电常量为 ε_r 的电介质，则 $\mathbf{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\mathbf{E}$，从而

$$W_E = \frac{1}{2}\int \varepsilon_0\varepsilon_r E^2 dv$$

可见，对于自由空间中的同一电场 **E**，电介质的存在会导致储存的能量增加 $\varepsilon_r>1$ 倍。用电容 C 和电压 V 表示这一储存能量为

$$W_E = \frac{1}{2}CV^2$$

相对于自由空间的能量增加反映在 C 中，它正比于 ε_r。

7.5　一定电压条件下的 D 和 E

如图 7-6 所示的平行板电容器，当两板之间是自由空间且所加电压恒定时，其中具有恒定的电场强度 **E**。忽略边缘效应，可得

$$\mathbf{E}_0 = \frac{V}{d}\mathbf{a}_n, \qquad \mathbf{D}_0 = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 = \frac{\varepsilon_0 V}{d}\mathbf{a}_n$$

此时如果用相对介电常量为 ε_r 的电介质填充于平板之间的空间，由于电压保持不变，而介电常数增大 ε_r 倍，所以

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0, \qquad \mathbf{D} = \varepsilon_r \mathbf{D}_0$$

例 4　两板之间是自由空间的平行板电容器被连接到恒压源上。当用 $\varepsilon_r = 2$ 的电介质填充于两板之间时，确定 W_E、C、Q 和 ρ_s 的变化。

解

关系式	注释
$W_E = 2W_{E0}$	见 7.4 节
$C = 2C_0$	$C = 2W_E/V^2$
$\rho_s = 2\rho_{s0}$	$\rho_s = D_n$
$Q = 2Q_0$	$Q = \rho_s A$

电介质的插入使得电容器从恒压源获得更多的电荷。

7.6　一定电量条件下的 D 和 E

在图 7-7 中，平行板电容器的上板带 $+Q$ 的电荷，下板带 $-Q$ 的电荷。从与电容器相连的电压源 V 获得电荷后，移走电压源。平板间是自由空间，忽略边缘效应，有

$$\mathbf{D}_0 = \frac{Q}{A}\mathbf{a}_n, \qquad \mathbf{E}_0 = \frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{D}_0 = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}\mathbf{a}_n$$

在以上条件下，由于没有导电路径通向平板，所以电荷无法增加也无法减少。因此，当电介质插入平板之间后，场成为

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_0, \qquad \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_r}\mathbf{E}_0$$

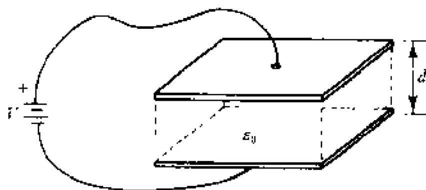


图 7-6

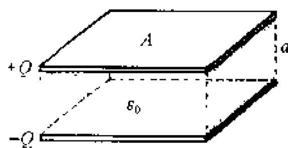


图 7-7

例 5　自由空间中充电的平行板电容器保持电绝缘，此时插入相对介电常量为 2 的电介质。试确定 W_E、C 和 V 的变化。（见习题 7.20）

解

关系式	注释
$W_E = \frac{1}{2}W_{E0}$	$\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{2}\mathbf{D}_0\cdot\mathbf{E}_0$
$V = \frac{1}{2}V_0$	$V = Ed$
$C = 2C_0$	$C = Q/V$

7.7　两种电介质分界面上的边界条件

如果图 6-11 和 6-12 中的导体被另一种不同的电介质替换，然后做与 6.10 节相同的论证，可建立如下两个边界条件：

(1) 在电介质分界面的两侧，E 的切向分量连续。用符号表示为

$$E_{t1} = E_{t2} \quad \text{或} \quad \frac{D_{t1}}{\varepsilon_{r1}} = \frac{D_{t2}}{\varepsilon_{r2}}$$

(2) **在电介质分界面的两侧，D 的法向分量具有大小为$|\rho_s|$的突变。**如果选择单位法向矢量指向电介质 2，那么这个条件可写为

$$D_{n1}-D_{n2}=-\rho_s \quad 或 \quad \epsilon_{r1}E_{n1}-\epsilon_{r2}E_{n2}=-\frac{\rho_s}{\epsilon_0}$$

一般情况下，分界面上不存在自由电荷($\rho_s=0$)，此时

$$D_{n1}=D_{n2} \quad 或 \quad \epsilon_{r1}E_{n1}=\epsilon_{r2}E_{n2}$$

例 6　在图 7-8 中的电介质分界面附近，$\mathbf{E}_1=2\mathbf{a}_x-3\mathbf{a}_y+5\mathbf{a}_z$ (V/m)，且分界面上没有自由电荷分布，求 $\mathbf{D}_2$、角 θ_1 和 θ_2。

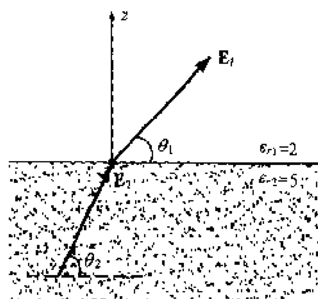


图 7-8

解　分界面是 $z=$const. 的平面。x 分量和 y 分量是切向的，z 分量是法向的。根据 **E** 的切向分量和 **D** 的法向分量的连续性，可得

$$\mathbf{E}_1=2\mathbf{a}_x-3\mathbf{a}_y+5\mathbf{a}_z$$
$$\mathbf{E}_2=2\mathbf{a}_x-3\mathbf{a}_y+E_{z2}\mathbf{a}_z$$
$$\mathbf{D}_1=\epsilon_0\epsilon_{r1}\mathbf{E}_1=4\epsilon_0\mathbf{a}_x-6\epsilon_0\mathbf{a}_y+10\epsilon_0\mathbf{a}_z$$
$$\mathbf{D}_2=D_{x2}\mathbf{a}_x+D_{y2}\mathbf{a}_y+10\epsilon_0\mathbf{a}_z$$

未知的分量现在可根据关系式 $\mathbf{D}_2=\epsilon_0\epsilon_{r2}\mathbf{E}_2$ 求得：

$$D_{x2}\mathbf{a}_x+D_{y2}\mathbf{a}_y+10\epsilon_0\mathbf{a}_z=2\epsilon_0\epsilon_{r2}\mathbf{a}_x-3\epsilon_0\epsilon_{r2}\mathbf{a}_y+\epsilon_0\epsilon_{r2}E_{z2}\mathbf{a}_z$$

从上式可求出

$$D_{x2}=2\epsilon_0\epsilon_{r2}=10\epsilon_0,\qquad D_{y2}=-3\epsilon_0\epsilon_{r2}=-15\epsilon_0,\qquad E_{z2}=\frac{10}{\epsilon_{r2}}=2$$

与分界面平面的夹角容易求得：

$$\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{a}_z=|\mathbf{E}_1|\cos(90^\circ-\theta_1),\qquad \mathbf{E}_2\cdot\mathbf{a}_z=|\mathbf{E}_2|\cos(90^\circ-\theta_2)$$
$$5=\sqrt{38}\sin\theta_1,\qquad 2=\sqrt{17}\sin\theta_2$$
$$\theta_1=54.2^\circ,\qquad \theta_2=29.0^\circ$$

由

$$\tan\theta_1=\frac{E_{z1}}{\sqrt{E_{x1}^2+E_{y1}^2}}=\frac{D_{z1}/\epsilon_0\epsilon_{r1}}{\sqrt{E_{x1}^2+E_{y1}^2}},\qquad \tan\theta_2=\frac{E_{z2}}{\sqrt{E_{x2}^2+E_{y2}^2}}=\frac{D_{z2}/\epsilon_0\epsilon_{r2}}{\sqrt{E_{x2}^2+E_{y2}^2}}$$

利用连续性的关系式，这两个方程相除可得一个有用的关系式：

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}$$

习　题　求　解

7.1　如果 $\mathbf{D}=3.0\times10^{-7}\mathbf{a}$ C/m²，求 $\epsilon_r=2.8$ 的电介质中的极化强度 **P**。

解　假定电介质均匀且各向同性，得

$$\mathbf{P}=\chi_e\epsilon_0\mathbf{E}$$

由于 $\mathbf{D}=\epsilon_0\epsilon_r\mathbf{E}$ 和 $\chi_e=\epsilon_r-1$，得

$$\mathbf{P}=\left(\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r}\right)\mathbf{D}=1.93\times10^{-7}\mathbf{a}\ \mathrm{C/m^2}$$

7.2　在电极化率为 3.5 且 $\mathbf{P}=2.3\times10^{-7}\mathbf{a}$ C/m² 的物质中，确定 **E**。

解　假定 **P** 和 **E** 同一方向，得

$$\mathbf{E}=\frac{1}{\chi_e\epsilon_0}\mathbf{P}=7.42\times10^3\mathbf{a}\ \mathrm{V/m}$$

7.3　在 $\epsilon_r=5.2$ 的电介质中，两个点电荷的相互作用力为 8.6×10^{-3} N。如果电荷在自由空间

中，预计力有多大？

解　由库仑定律，$F=Q_1Q_2/(4\pi\epsilon_0\epsilon_r d^2)$，表明力与 ϵ_r 成反比。在自由空间中，力将具有最大值：

$$F_{max}=\frac{5.2}{1}(8.6\times10^{-3})=4.47\times10^{-2}\ \text{N}$$

7.4　自由空间区域 1 定义为 $x<0$，$\epsilon_{r2}=2.4$ 的电介质区域 2 定义为 $x>0$，见图 7-9。已知

$$\mathbf{D}_1=3\mathbf{a}_x-4\mathbf{a}_y+6\mathbf{a}_z\ \text{C/m}^2$$

求 $\mathbf{E}_2$、角 θ_1 和 θ_2。

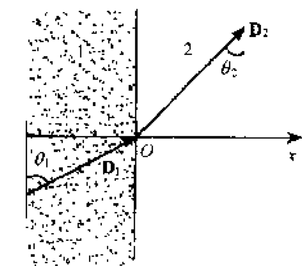


图 7-9

解　x 轴垂直于分界面，在分界面两侧 D_n 和 E_t 是连续的，从而可写出

$$\mathbf{D}_1=3\mathbf{a}_x-4\mathbf{a}_y+6\mathbf{a}_z,\qquad \mathbf{E}_1=\frac{3}{\epsilon_0}\mathbf{a}_x-\frac{4}{\epsilon_0}\mathbf{a}_y+\frac{6}{\epsilon_0}\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{D}_2=3\mathbf{a}_x+D_{y2}\mathbf{a}_y+D_{z2}\mathbf{a}_z,\ \mathbf{E}_2=E_{x2}\mathbf{a}_x-\frac{4}{\epsilon_0}\mathbf{a}_y+\frac{6}{\epsilon_0}\mathbf{a}_z$$

由 $\mathbf{D}_2=\epsilon_0\epsilon_{r2}\mathbf{E}_2$，得

$$3\mathbf{a}_x+D_{y2}\mathbf{a}_y+D_{z2}\mathbf{a}_z=\epsilon_0\epsilon_{r2}E_{x2}\mathbf{a}_x-4\epsilon_{r2}\mathbf{a}_y+6\epsilon_{r2}\mathbf{a}_z$$

所以　$E_{x2}=\dfrac{3}{\epsilon_0\epsilon_{r2}}=\dfrac{1.25}{\epsilon_0}$，　$D_{y2}=-4\epsilon_{r2}=-9.6$，　$D_{z2}=6\epsilon_{r2}=14.4$

对于角 θ_1，可求出如下：

$$\mathbf{D}_1\cdot\mathbf{a}_x=|\mathbf{D}_1|\cos(90^\circ-\theta_1)$$

$$3=\sqrt{61}\sin\theta_1,\qquad \theta_1=22.6^\circ$$

同理，$\theta_2=9.83^\circ$。

7.5　在 $x<0$ 的自由空间区域中，电场强度为 $\mathbf{E}_1=3\mathbf{a}_x+5\mathbf{a}_y-3\mathbf{a}_z$。$x>0$ 的区域是 $\epsilon_{r2}=3.6$ 的电介质。求电介质中的电场与 $x=0$ 平面的夹角 θ_2。

解　$\mathbf{E}_1$ 与平面的夹角可求出如下：

$$\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{a}_x=|\mathbf{E}_1|\cos(90^\circ-\theta_1)$$

$$3=\sqrt{43}\sin\theta_1,\qquad \theta_1=27.2^\circ$$

此外，根据例 6 所导出的公式，有

$$\tan\theta_2=\frac{1}{\epsilon_{r2}}\tan\theta_1=0.1428$$

于是 $\theta_2=8.13^\circ$。

7.6　电介质与自由空间的分界面方程是 $3x+2y+z=12\text{m}$。包含原点一侧的区域具有 $\epsilon_{r1}=3.0$，且 $\mathbf{E}_1=2\mathbf{a}_x+5\mathbf{a}_z$ V/m。求 $\mathbf{E}_2$。

解　图 7-10 中所示的分界面与坐标轴相交。分界面上指向自由空间侧的单位法向矢量为

$$\mathbf{a}_n=\frac{3\mathbf{a}_x+2\mathbf{a}_y+\mathbf{a}_z}{\sqrt{14}}$$

$\mathbf{E}_1$ 在 $\mathbf{a}_n$ 上的投影是分界面上 $\mathbf{E}_1$ 的法向分量，即

$$\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{a}_n=\frac{11}{\sqrt{14}}$$

于是

$$\mathbf{E}_{n1}=\frac{11}{\sqrt{14}}\mathbf{a}_n=2.36\mathbf{a}_x+1.57\mathbf{a}_y+0.79\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{E}_{t1}=\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_{n1}=-0.36\mathbf{a}_x-1.57\mathbf{a}_y+4.21\mathbf{a}_z=\mathbf{E}_{t2}$$

$$\mathbf{D}_{n1}=\epsilon_0\epsilon_{r1}\mathbf{E}_{n1}=\epsilon_0(7.08\mathbf{a}_x+4.71\mathbf{a}_y+2.37\mathbf{a}_z)=\mathbf{D}_{n2}$$

$$\mathbf{E}_{n2}=\frac{1}{\epsilon_0}\mathbf{D}_{n2}=7.08\mathbf{a}_x+4.71\mathbf{a}_y+2.37\mathbf{a}_z$$

所以　$\mathbf{E}_2=\mathbf{E}_{n2}+\mathbf{E}_{t2}=6.72\mathbf{a}_x+3.14\mathbf{a}_y+6.58\mathbf{a}_z$　V/m

图 7-10

图 7-11

7.7 图 7-11 给出了二维电介质板，其两边是自由空间。假定板内的场 $\mathbf{E}_2$ 恒定，试说明：$\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_1$。

根据两个分界面两侧 E_t 的连续性，可知

$$E_{t3} = E_{t1}$$

再根据两个分界面（无面电荷存在）两侧 D_n 的连续性，可写出

$$D_{n3} = D_{n1} \qquad 和 \qquad E_{n3} = E_{n1}$$

所以

$$\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_1$$

7.8 (a)验证：图 7-4(a)中电容器的电容为

$$C_{eq} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} A_1}{d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} A_2}{d} = C_1 + C_2$$

(b)验证：图 7-5(a)中电容器电容的倒数为

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} A/d_1} + \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} A/d_2} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

(a)由于两种电介质的电位差 V 相等，得

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \frac{V}{d}\mathbf{a}_n \qquad 和 \qquad \frac{\mathbf{D}_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}} = \frac{\mathbf{D}_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}} = \frac{V}{d}\mathbf{a}_n$$

式中 $\mathbf{a}_n$ 的方向向下且垂直于上板．由于 $D_n = \rho_s$，所以上板两部分的电荷密度为

$$\rho_{s1} = \frac{V}{d}\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}, \qquad \rho_{s2} = \frac{V}{d}\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}$$

于是总电量为

$$Q = \rho_{s1} A_1 + \rho_{s2} A_2 = V\left(\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} A_1}{d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} A_2}{d}\right)$$

因而，系统的电容 $C_{eq} = Q/V$ 具有题中要求的形式。

(b)令上板的电量为 $+Q$。那么，板间任意点处

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{A}\mathbf{a}_n$$

所以

$$\mathbf{E}_1 = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} A}\mathbf{a}_n, \qquad \mathbf{E}_2 = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} A}\mathbf{a}_n$$

两种电介质两侧的电压为

$$V_1 = E_1 d_1 = \frac{Q d_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} A}, \qquad V_2 = E_2 d_2 = \frac{Q d_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} A}$$

于是

$$V = V_1 + V_2 = Q\left(\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} A/d_1} + \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} A/d_2}\right)$$

由此可见，$1/C_{eq} = V/Q$ 具有题中要求的形式。

7.9 如图 7-12 所示，同轴电容器的长为 L，内导体半径为 a，外导体半径为 b，求电容。

忽略边缘效应，对本题而言，高斯定律要求导体之间满足 $D \propto 1/r$（见习题 6.22）。在 $r = a$ 处，$D = \rho_s$，其中 ρ_s（假定为正）是内导体上的面电荷密度。因此

$$\mathbf{D} = \rho_s \frac{a}{r} \mathbf{a}_r, \qquad \mathbf{E} = \frac{\rho_s a}{\epsilon_0 \epsilon_r r} \mathbf{a}_r$$

导体之间的电位差为

$$V_{ab} = -\int_b^a \left(\frac{\rho_s a}{\epsilon_0 \epsilon_r r} \mathbf{a}_r \right) \cdot (dr\, \mathbf{a}_r) = \frac{\rho_s a}{\epsilon_0 \epsilon_r} \ln \frac{b}{a}$$

内导体上的总电量为 $Q = \rho_s(2\pi a L)$，所以

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0 \epsilon_r L}{\ln(b/a)}$$

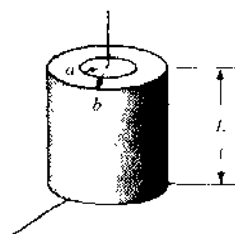


图 7-12

7.10 在如图7-13所示的电容器中，板间的区域用 $\epsilon_r = 4.5$ 的电介质填充，求电容。

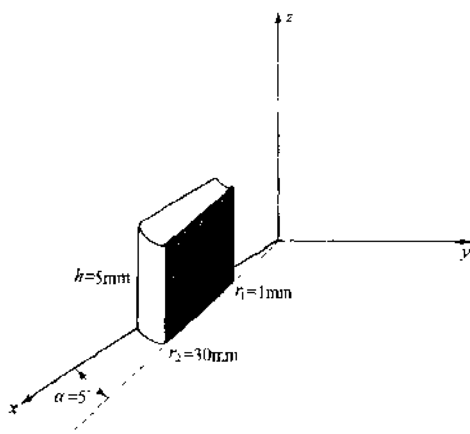


图 7-13

解答 忽略边缘效应，在圆柱坐标系中，板间的场 **D** 应具有 $\mathbf{D} = D_\varphi \mathbf{a}_\varphi$ 的形式，其中 D_φ 仅取决于 r。如果平板 $\varphi = \alpha$ 相对于平板 $\varphi = 0$ 的电压为 V_0，则

$$V_0 = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_0^\alpha \left(\frac{D_\varphi}{\epsilon_0 \epsilon_r} \mathbf{a}_\varphi \right) \cdot (r d\varphi\, \mathbf{a}_\varphi) = \frac{D_\varphi r}{\epsilon_0 \epsilon_r} \int_0^\alpha d\varphi = \frac{D_\varphi r}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

这样，$D_\varphi = -\epsilon_0 \epsilon_r V_0/(r\alpha)$。进一步，平板 $\varphi = \alpha$ 上的电荷密度为

$$\rho_s = D_n = -D_\varphi = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r V_0}{r\alpha}$$

于是平板上的总电量为

$$Q = \int \rho_s dS = \int_0^h \int_{r_1}^{r_2} \frac{\epsilon_0 \epsilon_r V_0}{r\alpha} dr dz$$

$$= \frac{\epsilon_0 \epsilon_r V_0 h}{\alpha} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

据此

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r h}{\alpha} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

代入数值（α 变换成弧度），我们得到 $C = 7.76$ pF。

7.11 参考习题7.10，当平板平行放置时，设板间电介质不变，求能够产生相同电容的平板间距 d。

解答 对于平行板电容器，有

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d}$$

所以

$$d = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{C} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r h (r_2 - r_1)}{(\epsilon_0 \epsilon_r h/\alpha)[\ln(r_2/r_1)]} = \frac{\alpha(r_2 - r_1)}{\ln(r_2/r_1)}$$

值得注意的是，上式右边的分子是电容器两端弧长之差，而分母是两弧长之比的自然对数。代入习题7.10中的数据，得 $\alpha r_1 = 0.087$mm，$\alpha r_2 = 2.62$mm 和 $d = 0.74$mm。

7.12 求半径为 a 的孤立球壳的电容。

解答　这种以无穷远处为零参考点的导体的电位为(见习题 2.34)

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

于是

$$C=\frac{Q}{V}=4\pi\varepsilon_0 a$$

7.13　求半径为 a，相距为 $d\gg a$ 的两球壳之间的电容。

解答　作为一种近似可利用习题 7.12 中的结论，单个球壳的电容为 $4\pi\varepsilon_0 a$。根据图7-14，这两个相同的电容器是串联的，所以

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2},\qquad C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=2\pi\varepsilon_0 a$$

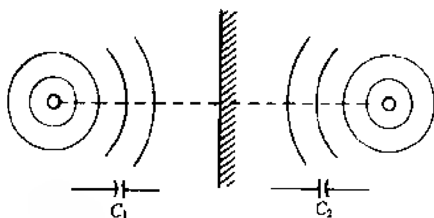


图 7-14

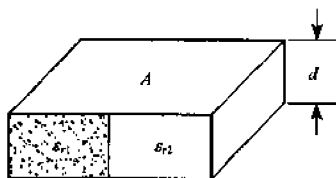


图 7-15

7.14　求含有两种电介质的平行板电容器的电容，其中 $\varepsilon_{r1}=1.5$、$\varepsilon_{r2}=3.5$、每种电介质占体积的一半，如图 7-15 所示。这里，$A=2\text{m}^2$ 和 $d=10^{-3}\text{m}$。

解答

$$C_1=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}A_1}{d}=\frac{(8.854\times10^{-12})(1.5)1}{10^{-3}}=13.3\ \text{nF}$$

同理，$C_2=31.0$ nF，于是

$$C=C_1+C_2=44.3\ \text{nF}$$

7.15　如果两种电介质各占板间空间的一半，但分界面平行于平板，重做习题 7.14。

解答

$$C_1=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r A}{d_1}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r A}{d/2}=\frac{(8.854\times10^{-12})(1.5)}{10^{-3}/2}=53.1\ \text{nF}$$

同理，$C_2=124$ nF，于是

$$C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=37.2\ \text{nF}$$

7.16　图 7-16 所示的圆柱电容器中，每种电介质占一半的体积。求电容。

解答　电介质的分界面平行于 D 和 E，所以该结构可看作是两个电容器的并联。由于每个电容器带有的电量是整个圆柱的一半，所以可从习题 7.9 的结论得出

$$C=C_1+C_2=\frac{\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}L}{\ln(b/a)}+\frac{\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}L}{\ln(b/a)}=\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r\text{avg}}L}{\ln(b/a)}$$

式中 $\varepsilon_{r\text{avg}}=\frac{1}{2}(\varepsilon_{r1}+\varepsilon_{r2})$。两种电介质的作用就像具有平均相对介电常量的一种电介质一样。

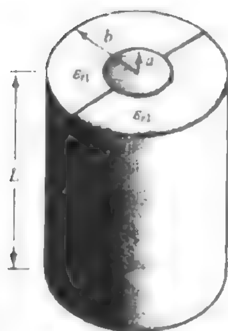


图 7-16

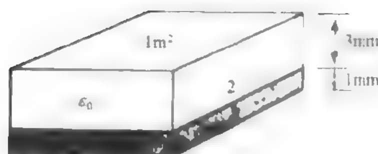


图 7-17

7.17 当外加电压为200V时，求图7-17所示电容器中每种电介质两端的电压。



$$C_1 = \frac{5\varepsilon_0 \times 1}{10^{-3}} = 5000\varepsilon_0, \qquad C_2 = \frac{1000\varepsilon_0}{3}$$

于是

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 312.5\varepsilon_0 = 2.77\times 10^{-9}\ \text{F}$$

而电容器内的场 **D** 可根据下式求得：

$$D_n = \rho_s = \frac{Q}{A} = \frac{CV}{A} = \frac{(2.27\times 10^{-9})(200)}{1} = 5.54\times 10^{-7}\ \text{C/m}^2$$

从而

$$E_1 = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}} = 1.25\times 10^4\ \text{V/m}, \qquad E_2 = \frac{D}{\varepsilon_0} = 6.25\times 10^4\ \text{V/m}$$

所以

$$V_1 = E_1 d_1 = 12.5\ \text{V}, \qquad V_2 = E_2 d_2 = 187.5\ \text{V}$$

7.18 求图7-18中每种电介质两端的电压，其中 $\varepsilon_{r1}=2.0$，$\varepsilon_{r2}=5.0$。内导体极板位于 $r_1=2\text{cm}$ 处，外导体极板位于 $r_2=2.5\text{cm}$ 处，电介质分界面位于电介质的正中间。



电压的分配与整个直圆柱体的情况相同。如图所示的扇形体，角为 α，其电容是完整的同轴电容器电容的 $\alpha/2\pi$ 倍。根据习题7.9，可得

$$C_1 = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}L}{\ln(2.25/2.0)} = \alpha L(1.5\times 10^{-10})\quad (\text{F})$$

$$C_2 = \alpha L(4.2\times 10^{-10})\quad (\text{F})$$

由于 $Q = C_1V_1 = C_2V_2$，$V_1 + V_2 = V$，所以

$$V_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2}V = \frac{4.2}{1.5 + 4.2}(100) = 74\ \text{V}$$

$$V_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2}V = \frac{1.5}{1.5 + 4.2}(100) = 26\ \text{V}$$

7.19 自由空间中的平行板电容器被暂时连接到电压源 V 上，充电后移走电源。如果移动平板使得板间距为 $d_2=2d_1$，确定 W_E、D、E、C 和 V 的变化，电量不变。



关系式	注释
$D_2 = D_1$	$D = Q/A$
$E_2 = E_1$	$E = D/\varepsilon_0$
$W_{E2} = 2W_{E1}$	$W_E = \frac{1}{2}\int \varepsilon_0 E^2 dv$ 且体积增加一倍
$C_2 = \frac{1}{2}C_1$	$C = \varepsilon A/d$
$V_2 = 2V_1$	$V = Q/C$

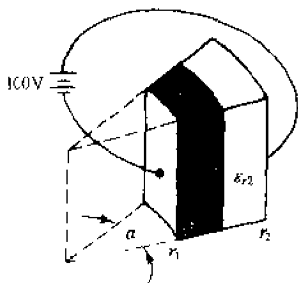


图7-18

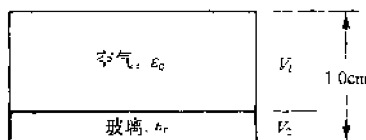


图7-19

7.20 根据物理概念解释(a)习题7.19中的能量变化，(b)例5中的能量变化。



(a)外部对系统所做的功(W_{E1})迫使带电平板反向分开。这种功体现在内部能量(场E所储存的能量)的增加上。

(b)在例5的条件下，外源被隔绝，电介质进入电容器使电场力做功，而这只有靠减少系统内的静电能量来实现。

7.21 间距为 $d=1.0\text{cm}$ 的平行板电容器具有29kV的外加电压，两板间是自由空间，假定空气的介电强度为30kV/cm。如图7-19所示，当插入介电强度为290kV/cm、厚度为 $d_2=$

0.20cm 的薄玻璃层($\varepsilon_r = 6.5$)时,说明空气为什么被击穿。

解 插入后,问题变成了两个电容器的串联。因

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 A}{8\times 10^{-3}} = 125\varepsilon_0 A,\quad C_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r A}{2\times 10^{-3}} = 3250\varepsilon_0 A$$

和习题 7.18 一样,得

$$V_1 = \frac{3250}{125+3250}(29) = 27.93\ \text{kV}$$

所以

$$E_1 = \frac{27.93\text{kV}}{0.80\text{cm}} = 34.9\ \text{kV/cm}$$

它大于空气的介电强度。

7.22 求半径为 $a = 2.5$cm 的圆柱导体与大地平面之间的每单位长度的电容,导体轴线平行于大地平面且相距 $h = 6.0$m。

解 对于这种问题,一种有效的求解方法是镜像法。设想在大地中有导体的镜像,令这个镜像导体带有与实际导体相反的电荷分布。现在假设大地被移走。显然,在实际导体处,两个导体的电场满足给定的边界条件,根据对称性,它们在大地平面处具有等位面。因此,用镜像导体代替后,大地平面上部的场就是实际导体与大地平面之间区域内的场。

在导体的中心处,用线电荷 $+\rho_l$ 和 $-\rho_l$ 分别近似实际的电荷分布和镜像电荷分布,我们得到(见图 7-20):

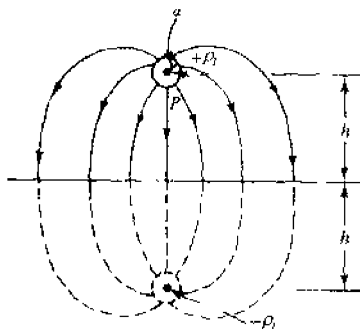


图 7-20

$$\text{在半径 } a \text{ 处由 } +\rho_l \text{ 产生的电位} = -\left(\frac{+\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\right)\ln a$$

$$\text{在点 P 处由 } -\rho_l \text{ 产生的电位} = -\left(\frac{-\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\right)\ln(2h-a)$$

在实际导体的表面 $r=a$ 上,由 $-\rho_l$ 产生的电位不是恒定的。但如果 $a \ll h$,这个电位几乎是恒定的。对于这种近似,实际导体的总电位为

$$V_a = -\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln a + \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln(2h-a) \approx -\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln a + \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln 2h = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h}{a}$$

同理,镜像导体的电位是 $-V_a$,因而导体之间的电位差为 $2V_a$,从而可知实际导体与大地平面之间的电位差为 $\frac{1}{2}(2V_a) = V_a$。这样可得每单位长度的电容为

$$\frac{C}{L} = \frac{Q/L}{V_a} = \frac{\rho_l}{V_a} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(2h/a)}$$

对于给定的 a 和 h, $C/L = 9.0$ pF/m。

关于 C/L 的上述表达式是不准确的,但是当 $a \ll h$ 时(实际情况),它提供了一种好的近似。准确解是

$$\left(\frac{C}{L}\right)_{\text{exact}} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{h+\sqrt{h^2-a^2}}{a}\right)}$$

注意到对于源-镜像系统(更一般地说,对于任何一对中心与中心相距 $2h$ 的平行圆柱导体), C/L 是上面所求的值的一半(相同电量,两倍电压)。换言之,根据 $d = 2h$,有

$$\frac{C}{L} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{d+\sqrt{d^2-4a^2}}{2a}\right)} \approx \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln(d/a)}$$

补 充 习 题

7.23 在电介质中, $E = 0.15$ MV/m, $\chi_e = 4.25$,求 **D**、**P** 和 ε_r 的大小。

答案：6.97 $\mu C/m^2$，5.64 $\mu C/m^2$，5.25

7.24 在电介质中，$\varepsilon_r=3.6$，$D=285\ nC/m^2$，求 $\mathbf{E}$、$\mathbf{P}$ 和 χ_e 的大小。

答案：8.94 kV/m，206 nC/m^2，2.6

7.25 在 $z<0$ 且 $\varepsilon_r=2.0$ 的区域中，已知 $\mathbf{E}=-3\mathbf{a}_x+4\mathbf{a}_y-2\mathbf{a}_z$ V/m，求 $z>0$ 且 $\varepsilon_r=6.5$ 的区域中的 $\mathbf{E}$。

答案：$-3\mathbf{a}_x+4\mathbf{a}_y-\frac{4}{6.5}\mathbf{a}_z$ V/m

7.26 在 $x>0$ 的自由空间区域中，已知 $\mathbf{D}=2\mathbf{a}_x-4\mathbf{a}_y+1.5\mathbf{a}_z\ C/m^2$，求 $x<0$ 且 $\varepsilon_r=5.0$ 的电介质区域中的 $\mathbf{P}$。

答案：$1.6\mathbf{a}_x-16\mathbf{a}_y-6\mathbf{a}_z\ C/m^2$

7.27 $z<0$m 的区域 1 是自由空间，其中 $\mathbf{D}=5\mathbf{a}_y+7\mathbf{a}_z\ C/m^2$；$0<z\leqslant 1$m 的区域 2 具有 $\varepsilon_r=2.5$；$z>1$m 的区域 3 具有 $\varepsilon_r=3.0$。求 $\mathbf{E}_2$、$\mathbf{P}_2$ 和 θ_3。

答案：$\frac{1}{\varepsilon_0}(5\mathbf{a}_y-\frac{7}{2.5}\mathbf{a}_z)$V/m，$7.5\mathbf{a}_y+4.2\mathbf{a}_z\ C/m^2$，25.02°

7.28 两种电介质的分界面平面是 $3x+z=5$。在包括原点的一侧，$\mathbf{D}_1=(4.5\mathbf{a}_x+3.2\mathbf{a}_z)\times10^{-7}$，$\varepsilon_{r1}=4.3$；而另一侧，$\varepsilon_{r2}=1.80$。求 E_1、E_2、D_2 和 θ_2。

答案：1.45×10^4，3.37×10^4，5.37×10^{-7}，83.06°

7.29 电介质分界面用方程 $4y+3z=12$m 描述。包括原点的一侧是自由空间，其中 $\mathbf{D}_1=\mathbf{a}_x+3\mathbf{a}_y+2\mathbf{a}_z\ \mu C/m^2$；另一侧，$\varepsilon_{r2}=3.6$。求 D_2 和 θ_2。

答案：5.14 $\mu C/m^2$，44.4°

7.30 求具有 $\varepsilon_r=3.0$ 的电介质、面积为 0.92m^2、间距为 4.5mm 的平行板电容器的电容。

答案：5.43 nF

7.31 平行板电容器的电容为 8.0 nF，面积为 1.5m^2，间距为 10mm。如果板间是自由空间，为了获得相同的电容，所要求的间距是多大？

答案：1.67mm

7.32 如图 7-21 所示，求内外弯曲的导体面之间的电容。

答案：6.86 pF

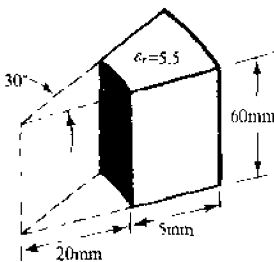


图 7-21

7.33 求直径为 2.75 英寸的圆柱导体和距导体轴 28 英尺的平行平面之间每单位长度的电容。

答案：8.99 pF/m(注意单位)

7.34 习题 7.33 中的导体直径增加一倍，求每单位长度的电容。

答案：10.1 pF/m

7.35 求空气中两平行圆柱导体之间每单位长度的电容，圆柱导体的半径为 1.5cm，两轴线相距 85cm。

答案：6.92 pF/m

7.36 平行板电容器的面积为 0.30m^2，间距为 5.5mm，包含如下三种电介质：$\varepsilon_{r1}=3.0$，$d_1=1.0$mm；$\varepsilon_{r2}=4.0$，$d_2=2.0$mm；$\varepsilon_{r3}=6.0$，$d_3=2.5$mm，它们的分界面与 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{D}$ 垂直。求电容。

答案：2.12 nF

7.37 1000V 的电压加到习题 7.36 中描述的电容器上，求每种电介质的电位差和电位梯度(电场强度)。

答案：267 V，267 kV/m；400 V，200 kV/m；333 V，133 kV/m

7.38 求外半径为 4mm、内半径为 0.5mm 的同轴圆柱导体单位长度的电容，导体间的电介质具有 $\varepsilon_r=5.2$。

答案：139 pF/m

7.39 电缆内导体的半径为 0.75cm，圆柱屏蔽层的半径为 2.25cm。导体间的电介质具有 $\varepsilon_r=2.70$，求每单位长度的电容。

答案：137 pF/m

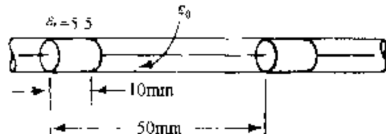


图 7-22

7.40 如图 7-22 所示，同轴电缆的内导体半径为 0.5mm，外导体半径为 5mm，内外导体之间有垫圈，求单位长度的电容。

答案：45.9 pF/m

7.41 平行板电容器被与它相连的 200V 恒定电压源短暂充电，板间是自由空间。电压源移走后，板间完全填充 $\epsilon_r = 2.0$ 的电介质。对比电介质插入前后 W_E、D、E、ρ_s、V 和 C 的值。

部分答案：$V_2 = \frac{1}{2}V_1$

7.42 平行板电容器的电介质由 $\epsilon_{r1} = 2.0$ 变为 $\epsilon_r = 6.0$，注意储存的能量不变：$W_2 = W_1$。试分析 V、C、D、E、Q 和 ρ_s 的变化。

部分答案：$\rho_{s2} = \sqrt{3}\rho_{s1}$

7.43 板间是自由空间的平行板电容器与恒压源相连，同时移动板使它们更近，间距由 d 变为 $\frac{1}{2}d$。分析 Q、ρ_s、C、D、E 和 W_E 的变化。

部分答案：$D_2 = 2D_1$

7.44 板间是自由空间的平行板电容器与恒压源相连，移动板使它们更远，间距由 d 变为 $2d$。给出 D、E、Q、ρ_s、C 和 W_E 的变化。

答案：$D_2 = \frac{1}{2}D_1$

7.45 平行板电容器的电介质是自由空间，间距为 d。保持电量 Q 不变，同时移动板使间距变为 $d/2$，用 $\epsilon_r = 3$ 的电介质完全填充于板间的空间。给出 D、E、V、C 和 W_E 的变化。

答案：$V_2 = \frac{1}{6}V_1$

7.46 平行板电容器的板间是自由空间。对比在这种自由空间中的电位梯度与 $\epsilon_r = 5.4$ 的云母层填充板间距离的 20% 时自由空间中的电位梯度。假定每种情况所加的电压相同。

答案：0.84

7.47 被屏蔽的电缆内导体相对于圆柱屏蔽层的工作电压为 12.5kV。有两种绝缘材料：第一种具有 $\epsilon_{r1} = 6.0$，从 $r = 0.8$cm 的内导体处到 $r = 1.0$cm 处；第二种具有 $\epsilon_{r2} = 3.0$，从 $r = 1.0$cm 处到屏蔽层内表面 $r = 3.0$cm 处。求每种绝缘材料中的最大电位梯度。

答案：0.645 MV/m, 1.03 MV/m

7.48 被屏蔽的功率电缆具有 $\epsilon_r = 2.26$ 的聚乙烯绝缘材料，介电强度为 18.1 MV/m。当内导体的半径为 1cm，同轴的屏蔽层的内侧半径为 8cm 时，内导体相对于屏蔽层的电压上限是多大？

答案：0.376 MV

7.49 对于图 7-16 中的同轴电容器，$a = 3$cm，$b = 12$cm，$\epsilon_{r1} = 2.50$ 和 $\epsilon_{r2} = 4.0$。如果电压差是 50V，求 $\mathbf{E}_1$、$\mathbf{E}_2$、$\mathbf{D}_1$ 和 $\mathbf{D}_2$。

部分答案：$E_2 = \pm(36.1/r)\,\mathbf{a}_r$ (V/m)

7.50 在图 7-23 中，$r_1 = 1$mm 的中心导体相对于 $r_2 = 100$mm 的外导体的电压为 100V。$1 < r < 50$mm 的区域是自由空间，$50 < r < 100$mm 的区域是 $\epsilon_r = 2.0$ 的电介质。求每个区域的电压。

答案：91.8 V, 8.2 V

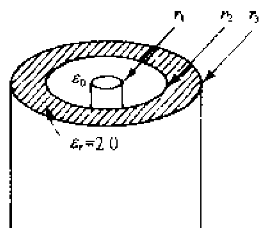


图 7-23

7.51 求习题 7.50 的两个区域中每单位长度所储存的能量。

答案：59.9 nJ/m, 5.30 nJ/m

第8章 拉普拉斯方程

8.1 引言

在第2章中，通过对点电荷、线电荷和其他电荷分布类型的叠加或积分，导出了电场强度 **E** 的表达式。在第3章中，应用高斯定律求出 **D**，进而得出了 **E**。尽管以上两种方法都有助于理解电磁场理论，但是由于通常并不知道电荷的分布情况，所以这两种方法并不实用。第5章把 **E** 确定为电位 V 的负梯度，这种方法需要知道整个区域内的电位函数，但电位一般是未知的，而通常指明的是平面、曲面或线状的导电材料，以及已知相对于某个参考电位的导体上的电压，而参考电位通常是其中一个导体的电位。本章所讨论的拉普拉斯方程提供了一种求解电位函数 V 的方法，这个电位函数受边界导体上的条件限制。

8.2 泊松方程和拉普拉斯方程

在4.3节中导出了麦克斯韦方程组中的一个方程 $\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$。把 $\varepsilon\mathbf{E}=\mathbf{D}$ 和 $-\nabla V=\mathbf{E}$ 代入，得

$$\nabla\cdot\varepsilon(-\nabla V)=\rho$$

如果在整个感兴趣的区域内电介质是均匀的，那么可以把 ϵ 从包含在散度内的偏导数中移出来，从而有

$$\nabla\cdot\nabla V=-\frac{\rho}{\varepsilon}\qquad\text{或}\qquad\nabla^2 V=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

这就是**泊松方程**。

当感兴趣的区域内分布有密度为 ρ 的电荷时，由泊松方程可求出电位函数。通常情况下，区域内是没有电荷的(而且区域内的介电常量是均匀的)，则泊松方程转化为

$$\nabla^2 V=0$$

这就是**拉普拉斯方程**。

8.3 拉普拉斯方程的显形式

由于拉普拉斯方程的左边是 V 的**梯度的散度**，所以在特定坐标系中，应用梯度和散度这两种运算可得到拉普拉斯方程的显形式。

在笛卡儿坐标系中，有

$$\nabla V=\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x+\frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y+\frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

对于一般矢量场 **A**，有

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

因此，拉普拉斯方程为

$$\nabla^2 V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

在圆柱坐标系中，有

$$\nabla V=\frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\mathbf{a}_\varphi+\frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

以及

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

从而拉普拉斯方程为

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

在球坐标系中，有

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\mathbf{a}_\varphi$$

以及

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

从而拉普拉斯方程为

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0$$

8.4 惟一性定理

满足边界条件的拉普拉斯方程或泊松方程必定存在惟一解，即解是**惟一的**。有时由于边界条件不完整，对解的惟一性的理解会含混不清。例如，考虑位于平面 $z=0$ 上电位为100V的导电平面，如图8-1所示。很明显

$$V_1 = 5z + 100, \qquad V_2 = 100$$

都满足拉普拉斯方程以及当 $z=0$ 时 $V=100$ 这个边界条件。造成这种情况是由于例中仅指明了电位而未给出参考电位，这种单个导电面无法构成指定区域的完整的边界。即使两个有限的平行导电平面也不能构成完整的边界，因为导电平面边缘附近的场无法确定，但是如果指明了**忽略边缘效应**，则导电平面之间的区域就具有完整的边界了。

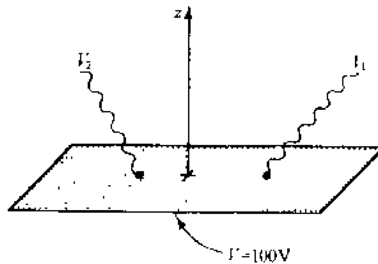


图 8-1

8.5 均值定理和最大值定理

在没有电荷的区域内，由拉普拉斯方程可导出电位的两个重要性质：

(1)圆心或球心的电位 V 等于圆周上或球面上电位的平均值(见习题8.1和习题8.2)；

(2)电位 V 在区域内部没有最大值(或最小值)(见习题8.3)。

由(2)可知，V 的最大值必定在区域的边界上。因为 V 满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

同理，$\partial V/\partial x$、$\partial V/\partial y$ 和 $\partial V/\partial z$ 的最大值必定也在区域的边界上。因此，**电场强度的笛卡儿分量在边界上取得最大值。**

8.6 笛卡儿坐标系中单变量的解

考虑图8-2中的平行导体，其中 $z=0$ 时 $V=0$，$z=d$ 时 $V=100$V。假设平板之间的区域内没有电荷，则

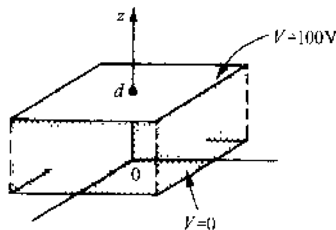


图 8-2

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

忽略边缘效应，电位函数仅与 z 有关，从而有

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = 0$$

积分得

$$V = Az + B$$

由 $z=0$ 时 $V=0$ 这个边界条件可导出 $B=0$；由 $z=d$ 时 $V=100$ 这个边界条件可导出 $A=100/d$。

因此

$$V = 100\left(\frac{z}{d}\right) \quad \text{(V)}$$

电场强度 $\mathbf{E}$ 可由下式求出：

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z\right) = -\frac{\partial}{\partial z}\left(100\,\frac{z}{d}\right)\mathbf{a}_z = -\frac{100}{d}\mathbf{a}_z \quad \text{(V/m)}$$

从而

$$\mathbf{D} = -\frac{\varepsilon 100}{d}\mathbf{a}_z \quad (\text{C/m}^2)$$

在导体表面上，有

$$\rho_s = D_n = \pm\frac{\varepsilon 100}{d} \quad (\text{C/m}^2)$$

其中在平面 $z=d$ 上取正号，在平面 $z=0$ 上取负号。

8.7　笛卡儿坐标系中乘积形式的解

在笛卡儿坐标系中，当电位在多个方向上变化时，拉普拉斯方程将包含有多项。假设 V 是 x 和 y 的函数，且具有特殊形式 $V=X(x)Y(y)$。这种形式可以用分离变量法求解。拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2(XY)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(XY)}{\partial y^2} = 0$$

转变为

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = 0$$

由于第一项与 y 无关，第二项与 x 无关，所以可使每项等于一个常数，但第一项的常数必须是第二项的常数的负数。令这个常数为 a^2，则

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = a^2, \qquad \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -a^2$$

对于给定的 a，X 的一般解为

$$X = A_1 e^{ax} + A_2 e^{-ax}$$

或写成

$$X = A_3 \cosh ax + A_4 \sinh ax$$

对于给定的 a，Y 的一般解为

$$Y = B_1 e^{jay} + B_2 e^{-jay}$$

或写成

$$Y = B_3 \cos ay + B_4 \sin ay$$

所以，关于变量 x 和 y 的电位函数可写成

$$V = (A_1 e^{ax} + A_2 e^{-ax})(B_1 e^{jay} + B_2 e^{-jay})$$

或

$$V = (A_3\cosh ax + A_4\sinh ax)(B_3\cos ay + B_4\sin ay)$$

因为拉普拉斯方程是线性齐次方程，所以上面乘积形式的解之和——每一个乘积形式的解对应于 a 的不同值——也是方程的解。按照这种方法可求出方程的通解。

同理，可求出三维解 $V=X(x)Y(y)Z(z)$，但此时有两个分离常数。

8.8　圆柱坐标系中乘积形式的解

如果采用形式 $V=R(r)\Phi(\varphi)Z(z)$，那么拉普拉斯方程转化为

$$\frac{\Phi Z}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{RZ}{r^2}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + R\Phi\frac{d^2Z}{dz^2} = 0$$

对于上式两端,除以 $R\Phi Z$ 并展开成关于 r 的导数,得

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{Rr}\frac{dR}{dr}+\frac{1}{r^2\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=-b^2$$

含有变量 r 和 φ 的项与变量 z 无关,含有变量 z 的项与变量 r 和 φ 无关。同前所述,可使这两项都等于一个常数 $-b^2$,从而有

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=b^2$$

在求解笛卡儿坐标系中乘积形式的解中,曾遇到过该方程,其解为

$$Z=C_1\cosh bz+C_2\sinh bz$$

现在进一步分离关于变量 r 和 φ 的方程,可得

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{r}{R}\frac{dR}{dr}+b^2r^2=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=a^2$$

关于变量 φ 的方程

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-a^2$$

的解为

$$\Phi=C_3\cos a\varphi+C_4\sin a\varphi$$

关于变量 r 的方程

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\left(b^2-\frac{a^2}{r^2}\right)R=0$$

是贝塞尔微分方程。它的解可用幂级数形式的贝塞尔函数表示为

$$R=C_5J_a(br)+C_6N_a(br)$$

式中 $J_a(br)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^m(br/2)^{a+2m}}{m!\ \Gamma(a+m+1)}$, $N_a(br)=\dfrac{(\cos a\pi)J_a(br)-J_{-a}(br)}{\sin a\pi}$

级数 $J_a(br)$**是第一类 a 阶**贝塞尔函数;当 $a=n$(n 为整数)时,幂级数中的伽马函数可用 $(n+m)!$ 替换。$N_a(br)$**是第二类 a 阶**贝塞尔函数;当 $a=n$(n 为整数)时,$N_n(br)$定义为当 $a\to n$ 时上式中商的极限。

在 $r=0$ 附近,函数 $N_a(br)$与 $\ln r$ 的变化曲线相似(见图 8-3)。由于在 $r=0$ 处,电位总是有限值,所以方程的解中不含有项 $N_a(br)(C_6=0)$。

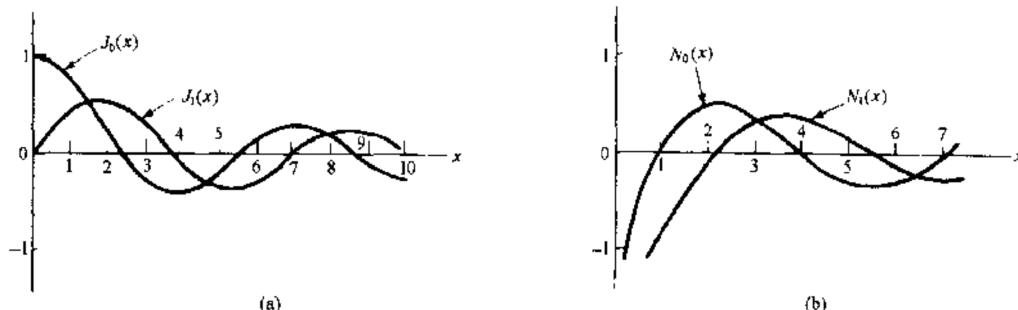


图 8-3

对于整数阶 n 和大宗量 x,贝塞尔函数与阻尼正弦波变化相似:

$$J_n(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{n\pi}{2}\right),\qquad N_n(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{n\pi}{2}\right)$$

变化曲线见图 8-3。

8.9 球坐标系中乘积形式的解

在球坐标系中,特别感兴趣的是电位函数 V 随 r、θ 变化而与 φ 无关的问题。对于乘积形

式的解 $V=R(r)\Theta(\theta)$，拉普拉斯方程转化为

$$\left(\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2r}{R}\frac{dR}{dr}\right)+\left(\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\frac{1}{\Theta\tan\theta}\frac{d\Theta}{d\theta}\right)=0$$

选取分离常数 $n(n+1)$，其中 n 为整数。两个分离方程分别为

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}-n(n+1)R=0$$

和

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\frac{1}{\tan\theta}\frac{d\Theta}{d\theta}+n(n+1)\Theta=0$$

关于变量 r 的方程的解为

$$R=C_1r^n+C_2r^{-(n+1)}$$

与贝塞尔方程不同，关于变量 θ 的方程是关于变量 $\xi=\cos\theta$ 的 n 次多项式的解

$$P_n(\xi)=\frac{1}{2^nn!}\frac{d^n}{d\xi^n}(\xi^2-1)^n,\qquad n=0,1,2,\cdots$$

多项式 $P_n(\xi)$ 是 n **阶勒让德多项式。**方程还有第二个独立解 $Q_n(\xi)$，它在 $\xi=\pm1$（即 $\theta=0,\pi$）处以对数形式发散。

习 题 求 解

8.1　如图 8-4(a) 所示，在 $1/n$ 的圆周上电位为 V_1，在其余圆周上电位为 0，整个区域内无电荷分布。求在圆心处的电位。

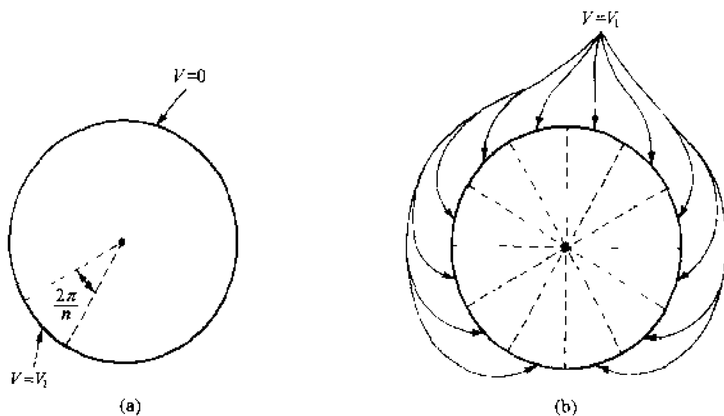


图 8-4

令在圆心处的电位为 V_c。拉普拉斯方程满足解的叠加性。如果把 n 个与图 8-4(a) 相同的问题叠加，则可得到图 8-4(b) 所示的问题。由轴对称性可知，图 8-4(b) 中的每一个子问题在圆心处产生相同的电位 V_c，所以在圆心处的总电位是 nV_c。另一方面，对于图 8-4(b) 问题的惟一解是圆内任一点处电位 $V=V_1$，当然在圆心处的电位也为 $V=V_1$。因此

$$nV_c=V_1\qquad 或\qquad V_c=\frac{V_1}{n}$$

8.2　试由习题 8.1 的结果导出均值定理。

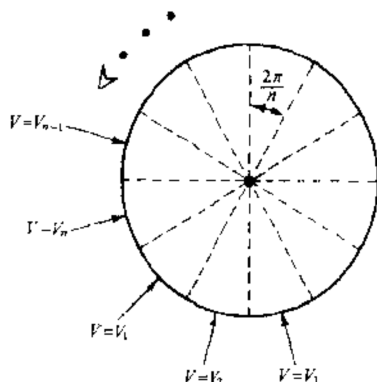


图 8-5

首先考虑图 8-5 所示的特殊情况，这里假设在圆周的 n 等分上有 n 个不同的电位值。对习题 8.1 的解进行叠加可导出在圆心处的电位为

$$V_c=\frac{V_1}{n}+\frac{V_2}{n}+\cdots+\frac{V_n}{n}=\frac{V_1+V_2+\cdots+V_n}{n}$$

这就是该特殊情况的均值定理。利用 $\Delta\varphi=2\pi/n$，上式成为

$$V_c=\frac{1}{2\pi}(V_1\Delta\varphi+V_2\Delta\varphi+\cdots+V_n\Delta\varphi)$$

当 $n\to\infty$ 时，有

$$V_c=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}V(\varphi)d\varphi$$

该式就是圆周上的一般均值定理。

用立体角代替平面角，同理可导出球的一般均值定理。

8.3 证明在无电荷分布区域内电位不能达到最大值。

解答 假设在区域内部的点 P 处有电位最大值。那么以点 P 为球心作一个小球，则点 P 处的电位 V_c 大于球面上任意一点的电位，而且 V_c 也将大于在球面上的平均电位。显然这一结果与均值定理是相矛盾的。

8.4 求在图 8-6 中的两个平行圆盘之间区域内的电位函数，忽略边缘效应。

解答 因为 V 不是 r、φ 的函数，所以拉普拉斯方程简化为

$$\frac{d^2V}{dz^2}=0$$

方程的解为　　$V=Az+BP$

在平行圆盘之间区域内的电位函数与任何两平行平面之间区域内的电位函数相同。当选择其他坐标轴时，线性电位函数为 $Ay+B$ 或 $Ax+B$。

8.5 在真空中的两个平行导电平面分别位于 $y=0$ 和 $y=0.02\text{m}$ 处，参考零电位在 $y=0.01\text{m}$ 处。若在两导体之间 $\mathbf{D}=253\mathbf{a}_y\ \text{nC/m}^2$，试确定导体上的电压。

解答 由习题 8.4 可知，$V=Ay+B$，从而

$$\mathbf{E}=\frac{\mathbf{D}}{\varepsilon}=-\nabla V=-A\,\mathbf{a}_y$$

$$\frac{253\times10^{-9}}{8.854\times10^{-12}}\mathbf{a}_y=-A\,\mathbf{a}_y$$

因此 $A=-2.86\times10^{-4}$ V/m。又

$$0=(-2.86\times10^4)(0.01)+B\quad\text{或}\quad B=2.86\times10^2\text{ V}$$

从而　　$V=-2.86\times10^4y+2.86\times10^2(\text{V})$

所以，当 $y=0$ 时 $V=286\text{V}$，当 $y=0.02$ 时 $V=-286\text{V}$。

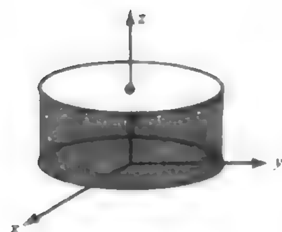


图 8-6

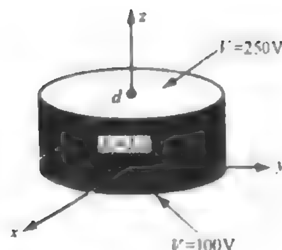


图 8-7

8.6 如图 8-7 所示，平行导电圆盘相距 5mm，在圆盘区域内有 $\varepsilon_r=2.2$ 的电介质。试确定圆盘上的电荷密度。

解答 由 $V=Az+B$，可得

$$A=\frac{\Delta V}{\Delta z}=\frac{250-100}{5\times10^2}=3\times10^4\text{ V/m}$$

$$\mathbf{E}=-\nabla V=-3\times10^4\,\mathbf{a}_z\text{ V/m}$$

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\mathbf{E}=-5.84\times10^{-7}\,\mathbf{a}_z\text{ C/m}^2$$

因为在圆盘之间 $\mathbf{D}$ 是常数，且在导体表面上 $D_n=\rho_s$，所以

$$\rho_s=\pm5.84\times10^{-7}\text{ C/m}^2$$

在上导体圆盘上取正号，在下导体圆盘上取负号。

8.7 对于两个同轴圆柱面，当 $r=1\text{mm}$ 时 $V=0$，$r=20\text{mm}$ 时 $V=150\text{V}$。求在两个圆柱面之间区域内的电位函数和电场强度，忽略边缘效应，见图 8-8。

解答 电位与变量 φ 和 z 无关，拉普拉斯方程简化为

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right)=0$$

积分一次，得

$$r\frac{dV}{dr}=A$$

再积分一次，得 $V=A\ln r+B$。应用边界条件，可得

$$0=A\ln 0.001+B,\qquad 150=A\ln 0.020+B$$

从而解得 $A=50.1$，$B=345.9$。因此

$$V=50.1\ln r+345.9\ (\mathrm{V}),\qquad \mathbf{E}=\frac{50.1}{r}(-\mathbf{a}_r)\ (\mathrm{V/m})$$

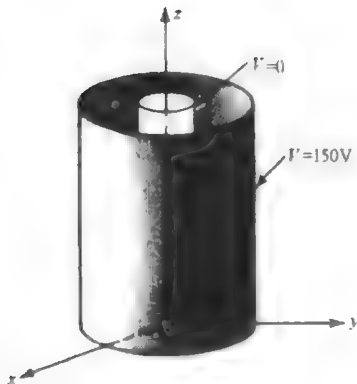


图 8-8

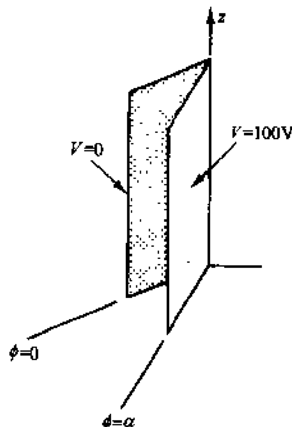


图 8-9

8.8　如图 8-9 所示，在圆柱坐标系中，两个 $\varphi=\text{const.}$ 的平面在 z 轴上是绝缘的。设在平面 $\varphi=\alpha$ 上的电位为 100V，参考零电位在平面 $\varphi=0$ 上。忽略边缘效应，求两平面之间 $\mathbf{E}$ 的表达式。

解　在习题 7.10 中已经解决了这样的问题，这里将用拉普拉斯方程导出相同的结果。由于电位函数不随变量 r、z 变化，所以拉普拉斯方程为

$$\frac{1}{r}\frac{d^2V}{d\varphi^2}=0$$

积分可得 $V=A\varphi+B$。由边界条件可得

$$0=A(0)+B,\qquad 100=A(\alpha)+B$$

从而有　$A=\dfrac{100}{\alpha},\qquad B=0$

因此　$V=100\dfrac{\varphi}{\alpha}\ (\mathrm{V})$

$$\mathbf{E}=-\nabla V=-\frac{1}{r}\frac{d}{d\varphi}\left(100\frac{\varphi}{\alpha}\right)\mathbf{a}_\varphi=-\frac{100}{r\alpha}\mathbf{a}_\varphi(\mathrm{V/m})$$

8.9　在球坐标系中有两个同心球面，当 $r=0.10\mathrm{m}$ 时 $V=0$，$r=2.0\mathrm{m}$ 时 $V=100\mathrm{V}$。假设这两个同心球面之间的区域是真空，求 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{D}$。

解　因为 V 不是 θ 和 φ 的函数，所以拉普拉斯方程简化为

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right)=0$$

积分得　$r^2\dfrac{dV}{dr}=A$

再次积分得　$V=\dfrac{-A}{r}+B$

由边界条件可得

$$0=\frac{-A}{0.10}+B,\qquad 100=\frac{-A}{2.00}+B$$

因此，$A=10.53\ \mathrm{V\cdot m}$，$B=105.3\ \mathrm{V}$。这样得到

$$V=\frac{-10.53}{r}+105.3\ (\mathrm{V})$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dr}\mathbf{a}_r = -\frac{10.53}{r^2}\mathbf{a}_r\,(\text{V/m})$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} = \frac{-9.32\times10^{-11}}{r^2}\mathbf{a}_r\,(\text{C/m}^2)$$

8.10 在球坐标系中，$r=2\text{cm}$ 的球面导体上的电压为 $V=-25\text{V}$，$r=35\text{cm}$ 的球面导体上的电压为 $V=150\text{V}$。在两球面导体之间的空间内有 $\varepsilon_r=3.12$ 的电介质，求球面导体上的面电荷密度。

解 由习题 8.9，可知

$$V = \frac{-A}{r} + B$$

由边界条件可确定出待定常数，即

$$-25 = \frac{-A}{0.02} + B,\qquad 150 = \frac{-A}{0.35} + B$$

这样
$$V = \frac{-3.71}{r} + 160.61\ (\text{V})$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{d}{dr}\left(\frac{-3.71}{r} + 160.61\right)\mathbf{a}_r = \frac{-3.71}{r^2}\mathbf{a}_r\,(\text{V/m})$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\mathbf{E} = \frac{-0.103}{r^2}\mathbf{a}_r\,(\text{nC/m}^2)$$

因在导体表面上有 $D_n = \rho_s$，所以

在 $r=0.02\text{m}$ 的导体面上：

$$\rho_s = \frac{-0.103}{(0.02)^2} = -256\ \text{nC/m}^2$$

在 $r=0.35\text{m}$ 的导体面上：

$$\rho_s = \frac{+0.103}{(0.35)^2} = +0.837\ \text{nC/m}^2$$

8.11 如图 8-10 所示，试求解同轴圆锥面之间区域内的拉普拉斯方程。假定在 $\theta=\theta_1$ 的面上电位为 V_1，在 $\theta=\theta_2$ 的面上电位为 $V=0$，圆锥面的顶角在 $r=0$ 处是绝缘的。

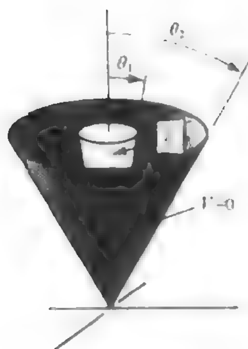


图 8-10

解 电位函数不随 r 和 φ 变化，拉普拉斯方程简化为

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dV}{d\theta}\right) = 0$$

积分，得
$$\sin\theta\left(\frac{dV}{d\theta}\right) = A$$

所以
$$V = A\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) + B$$

待定常数可由下式求出：

$$V_1 = A\ln\left(\tan\frac{\theta_1}{2}\right) + B,\qquad 0 = A\ln\left(\tan\frac{\theta_2}{2}\right) + B$$

则有
$$V = V_1\frac{\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) - \ln\left(\tan\frac{\theta_2}{2}\right)}{\ln\left(\tan\frac{\theta_1}{2}\right) - \ln\left(\tan\frac{\theta_2}{2}\right)}$$

8.12 在习题 8.11 中，令 $\theta_1=10^\circ$、$\theta_2=30^\circ$ 和 $V_1=100\text{V}$。求在 $\theta_1=20^\circ$ 处的电压。θ 为多少时电压为 50V。

解 把已知值代入电位的一般表达式，得

$$V = -89.34\left[\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) - \ln0.268\right] = -89.34\ln\left(\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{0.268}\right)$$

把 $\theta_1=20^\circ$ 代入，得 $V = -89.34\ln\left(\dfrac{\tan10^\circ}{0.268}\right) = 37.40\ \text{V}$

对于 $V=50\text{V}$，有 $50 = -89.34\ln\left(\dfrac{\tan\theta/2}{0.268}\right)$

解得
$$\theta = 17.41^\circ。$$

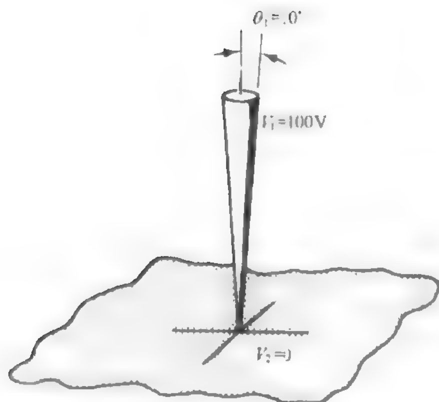


图 8-11

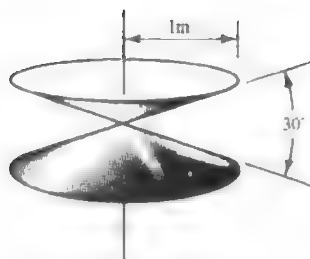


图 8-12

8.13 参考习题 8.11、习题 8.12 和图 8-11，求在 $\theta_2=90^\circ$ 的导电平面上的电荷分布。

把 $\theta_2=90^\circ$、$\theta_1=10^\circ$ 和 $V_1=100\text{V}$ 代入习题 8.11 的表达式中可求出电位函数：

$$V=100\frac{\ln\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)}{\ln(\tan 5^\circ)}$$

进一步，得

$$\mathbf{E}=-\frac{1}{r}\frac{dV}{d\theta}\mathbf{a}_\theta=\frac{-100}{(r\sin\theta)\ln(\tan 5^\circ)}\mathbf{a}_\theta=\frac{41.05}{r\sin\theta}\mathbf{a}_\theta$$

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}=\frac{3.63\times10^{-10}}{r\sin\theta}\mathbf{a}_\theta(\text{C/m}^2)$$

在 $\theta=90^\circ$ 的平面上，$\sin\theta=1$，$\mathbf{D}$ 的方向决定了平面上的面电荷应是负的。所以

$$\rho_s=-\frac{3.63\times10^{-10}}{r}\ (\text{C/m}^2)$$

8.14 求解图 8-12 中两个圆锥面之间的电容，假设区域为真空。

忽略边缘效应，把 $\theta_1=75^\circ$、$\theta_2=105^\circ$ 代入习题 8.11 中的表达式，可得出电位函数：

$$V=V_1\frac{\ln\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)-\ln(\tan 52.5^\circ)}{\ln(\tan 37.5^\circ)-\ln(\tan 52.5^\circ)}$$

$$=(-1.89V_1)\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)+\text{const}$$

由此可得

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}=\varepsilon_0\left(-\frac{1}{r}\frac{dV}{d\theta}\mathbf{a}_\theta\right)=\frac{1.89\varepsilon_0V_1}{r\sin\theta}\mathbf{a}_\theta$$

上圆锥面上的面电荷密度为

$$\rho_s=D_n=\frac{1.89\varepsilon_0V_1}{r\sin 75^\circ}$$

进一步可求出上圆锥面上的总电荷为

$$Q=\int\rho_s dS=\int_0^{2\pi}\int_0^{\csc 75^\circ}\frac{1.89\varepsilon_0V_1}{r\sin 75^\circ}r\sin 75^\circ dr d\varphi=12.28\varepsilon_0V_1$$

所以电容为　　$C=Q/V_1=12.28\varepsilon_0$

8.15 在两个同轴的圆柱面区域内，电荷密度 ρ 是均匀分布的。试应用泊松方程求解 V。

忽略边缘效应，泊松方程简化为

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right)=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right)=-\frac{\rho r}{\varepsilon}$$

积分，得

$$r\frac{dV}{dr}=-\frac{\rho r^2}{2\varepsilon}+A$$

$$\frac{dV}{dr}=-\frac{\rho r}{2\varepsilon}+\frac{A}{r}$$

$$V=-\frac{\rho r^2}{4\varepsilon}+A\ln r+B$$

需要指出：在空间内有电荷分布的静态问题仅是从强化理论训练的角度提出来的，因为没有任何方法能够使电荷克服库仑力而维持在某一固定位置上。

8.16 在区域 $-\frac{\pi}{2}<\frac{z}{z_0}<\frac{\pi}{2}$ 内电荷密度为 $\rho=10^{-8}\cos(z/z_0)\,(\text{C/m}^3)$，在其他区域内电荷密度为 0。试由泊松方程求解 V 和 $\mathbf{E}$，并与由高斯定律得出的结果相比较。

解 由于 V 不是 x、y 的函数，所以泊松方程为

$$\frac{d^2V}{dz^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}=-\frac{10^{-8}\cos(z/z_0)}{\varepsilon}$$

积分两次，可得

$$V=\frac{10^{-8}z_0^2\cos(z/z_0)}{\varepsilon}+Az+B\ (\text{V})$$

$$\mathbf{E}=-\nabla V=\left(\frac{10^{-8}z_0\sin(z/z_0)}{\varepsilon}-A\right)\mathbf{a}_z\,(\text{V/m})$$

由电荷分布的对称性可知，电场在平面 $z=0$ 上必为零。所以可得 $A=0$ 和

$$\mathbf{E}=\frac{10^{-8}z_0\sin(z/z_0)}{\varepsilon}\mathbf{a}_z\,(\text{V/m})$$

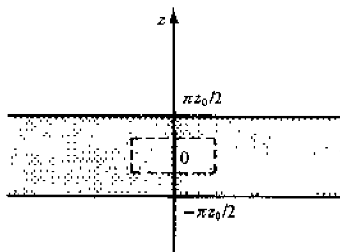


图 8-13

图 8-13 表示一个以 $z=0$ 为中心的特殊高斯面。$\mathbf{D}$ 仅穿过高斯面的上、下面，面积均为 A。此外，因为电荷分布关于 $z=0$ 对称，所以 $\mathbf{D}$ 必定关于 $z=0$ 反对称，即 $\mathbf{D}_{上端面}=D\,\mathbf{a}_z$，$\mathbf{D}_{下端面}=D(-\mathbf{a}_z)$。所以

$$D\int_{上端面}dS+D\int_{下端面}dS=\int_{-z}^{z}\iint 10^{-8}\cos(z/z_0)\,dx\,dy\,dz$$

$$2DA=2z_0A\,10^{-8}\sin(z/z_0)$$

或

$$D=z_0\,10^{-8}\sin(z/z_0),\qquad 0<z<\pi z_0/2$$

这样，对于 $-\pi z_0/2<z<\pi z_0/2$，有

$$\mathbf{D}=z_0 10^{-8}\sin(z/z_0)\mathbf{a}_z\,(\text{C/m}^2)$$

和 $\mathbf{E}=\mathbf{D}/\varepsilon$。这与由泊松方程所得出的结果相同。

8.17 在圆柱坐标系中，设电位函数是变量 r、φ 的函数，而与 z 无关。当 $V=R(r)\Phi(\varphi)$ 时，分别求解 R 和 Φ 的微分方程。区域内无电荷分布。

解 拉普拉斯方程转化为

$$\Phi\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{\Phi}{r}\frac{dR}{dr}+\frac{R}{r^2}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=0$$

或

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{r}{R}\frac{dR}{dr}=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}$$

方程的左边仅是 r 的函数，右边仅是 φ 的函数，所以可使方程的两边都等于一个常数 a^2。对于方程

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{r}{R}\frac{dR}{dr}=a^2$$

或

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}-\frac{a^2R}{r^2}=0$$

其解为 $R=C_1r^a+C_2r^{-a}$。对于方程

$$-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=a^2$$

其解为

$$\Phi=C_3\cos a\varphi+C_4\sin a\varphi$$

8.18 已知电位函数为 $V=V_0(\sinh ax)(\sin az)$（见 8.7 节），试确定 $V=0$ 和 $V=V_0$ 的等位面的位置和形状。设 $a>0$。

解 因为电位函数不是 y 的函数，所以等位面在 y 轴方向上延伸到 $\pm\infty$ 处。当 $z=n\pi/a$（其中 $n=0,1,2,\cdots$）时，$\sin az=0$，所以平面 $z=0$ 和平面 $z=\pi/a$ 都是零电位。而当 $x=0$ 时，$\sinh ax=0$，可见平面 $x=0$ 也是零电位。$V=0$ 的等位面可由图 8-14 中的粗实折线表示。

$V=V_0$ 的等电位面方程为

$$V_0 = V_0(\sinh ax)(\sin az) \quad 或 \quad \sinh ax = \frac{1}{\sin az}$$

把 0 和 π/a 之间的 z 值代入方程，可求出相应的坐标 x 的值，例如下表：

az	1.57 1.57	1.02 2.12	0.67 2.47	0.49 2.65	0.28 2.68	0.10 3.04
ax	0.88	1.0	1.25	1.50	2.00	3.00

在图 8-14 中粗实折线表示的等位面是关于 $z = \pi/2a$ 对称的。因为在 x 方向上，V 是周期性的，且 $V(-x, -z) = V(x, z)$，所以由图 8-14 中的带状区域等位面可得到整个 xz 平面上的等位面。

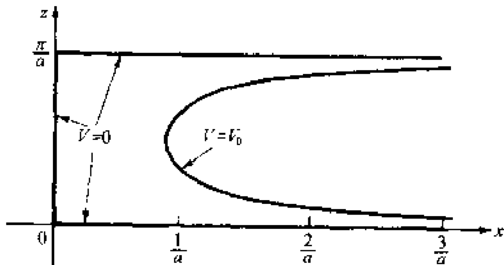


图 8-14

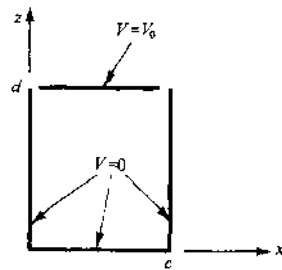


图 8-15

8.19 如图 8-15 所示，求矩形槽区域内的电位函数。

电位是 x 和 z 的函数，其形式为（见 8.7 节）

$$V = (C_1\cosh az + C_2\sinh az)(C_3\cos ax + C_4\sin ax)$$

由 $x=0$ 和 $z=0$ 时 $V=0$ 的边界条件，可知常数 C_1 和 C_3 为零。又由于 $x=c$ 时，$V=0$，从而可得 $a = n\pi/c$（n 为整数）。用 C 代替 C_2C_4，电位表达式变为

$$V = C\,\sinh\frac{n\pi z}{c}\sin\frac{n\pi x}{c}$$

更一般地，通过叠加可得出通解为

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh\frac{n\pi z}{c}\sin\frac{n\pi x}{c}$$

由最后一个边界条件可得

$$V_0 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\,\sinh\frac{n\pi d}{c}\right)\sin\frac{n\pi x}{c} \qquad (0 < x < c)$$

因此，常数 $b_n \equiv C_n\sinh(n\pi d/c)$ 被确定为在区间 $0<x<c$ 内函数 $f(x)\equiv V_0$ 的**傅里叶正弦级数**的系数。由傅里叶级数的系数公式

$$b_n = \frac{2}{c}\int_0^c f(x)\,\sin\frac{n\pi x}{c}\,dx, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

可得出

$$b_n = \frac{2V_0}{c}\int_0^c \sin\frac{n\pi x}{c}dx = \begin{cases} 0, & n\ 偶数 \\ 4V_0/n\pi, & n\ 奇数 \end{cases}$$

从而电位函数为

$$V = \sum_{n奇数}\frac{4V_0}{n\pi}\,\frac{\sinh(n\pi z/c)}{\sinh(n\pi d/c)}\sin\frac{n\pi x}{c}, \qquad 0 < x < c\ 且\ 0 < z < d$$

8.20 验证在球坐标系中位于原点的偶极子产生的乘积形式的电位解为

$$V = \frac{C_2}{r^2}P_1(\cos\theta) = \frac{C_2\cos\theta}{r^2}$$

（在 8.9 节中令 $C_1 = 0$、$n = 1$ 可得）

图 8-16 表示一个位于 z 轴上的有限偶极子，它是由位于 $z=+d/2$ 的点电荷 $+Q$ 和位于 $z=-d/2$ 的点电荷 $-Q$ 构成。$p=Ql$ 是偶极矩(见 7.1 节)。点 P 处的电位是

$$V=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1}-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2}=\frac{p}{4\pi\epsilon_0 d}\left(\frac{r_2-r_1}{r_1 r_2}\right)$$

在 $d\to 0$ 的极限条件下，可得到位于原点的点形式电偶极子。当 d 很小时，因

$$r_2-r_1\approx d\cos\theta_2\approx d\cos\theta \quad 和 \quad r_1 r_2\approx r^2$$

所以在极限情况下，有

$$V=\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2}$$

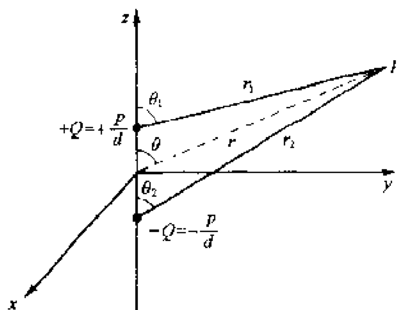


图 8-16

当 $C_2=p/4\pi\epsilon_0$ 时，该式是在球坐标系中乘积形式的电位解。

同理，高阶勒让德多项式对应于四极点极子、八极点极子的电位解等等。

补 充 习 题

8.21 在笛卡儿坐标系中，设电位仅是 x 的函数。已知 $x=-2.0\text{cm}$ 时 $V=25.0\text{V}$，整个空间中 $\mathbf{E}=1.5\times10^3(-\mathbf{a}_x)\text{V/m}$。求在 $x=3.0\text{cm}$ 处的 V。

答案：100V

8.22 在笛卡儿坐标系中，$z=3.0\text{cm}$ 的平面为参考电位面。若区域内有 $\epsilon_r=4.5$ 的电介质，且 $z>0$ 时 $\mathbf{E}=6.67\times10^3\mathbf{a}_z\ \text{V/m}$，求位于 $z=0$ 处的导体上的电压和电荷密度。

答案：200V，266 nC/m^2

8.23 在圆柱坐标系中，已知在 $r=5\text{mm}$ 处 $V=75.0\text{V}$，在 $r=60\text{mm}$ 处 $V=0$。如果电位仅与变量 r 有关，求在 $r=130\text{mm}$ 处的电压。

答案：-23.34V

8.24 在真空中，两个同轴导电圆柱面分别位于 $r=5\text{mm}$ 和 $r=25\text{mm}$ 处，它们的电压分别为 0 和 V_0。如果在 $r=15\text{mm}$ 处 $\mathbf{E}=-8.28\times10^3\ \mathbf{a}_r\ \text{V/m}$，求外导体圆柱面上的 V_0 和电荷密度。

答案：200V，$+44\ \text{nC/m}^2$

8.25 有两个同轴导电圆柱面，若在 $r=1\text{mm}$ 处的导电圆柱面上的电位为 $V=75\text{V}$，在 $r=20\text{mm}$ 处 $V=0$。圆柱面之间有 $\epsilon_r=3.6$ 的电介质，求区域内的 $\mathbf{D}$。

答案：$(798/r)\mathbf{a}_r(\text{pC/m}^2)$

8.26 在圆柱坐标系中，位于 $\varphi=10°$ 和 $\varphi=0°$ 的两个导电平面的电位分别是 75V 和 0V。两平面之间区域内有 $\epsilon_r=1.65$ 的材料，求区域内的 $\mathbf{D}$。

答案：$(-6.28/r)\mathbf{a}_r(\text{nC/m}^2)$

8.27 如图 8-17 所示，有两个边长为 50cm 的正方形导电平面，在其中一端两平面相距 2.0cm，在另一端相距 2.5cm。已知两平面的电位差，试比较在平面中心的电荷密度与处处相距为 2.0cm 的相同导电平面中心处的电荷密度的差异。

答案：0.89

8.28 在球坐标系中，参考电位球面位于 $r=15\text{mm}$ 处，在球面 $r=200\text{mm}$ 上的电压为 V_0。已知在球面 $r=110\text{mm}$ 上，$\text{E}=-334.7\ \mathbf{a}_r\ \text{V/m}$，求 V_0。电位仅是 r 的函数。

答案：250V

8.29 在球坐标系中，在 $r=50\text{cm}$ 处 $V=865\text{V}$，在 $r=85\text{cm}$ 处 $\mathbf{E}=748.2\ \mathbf{a}_r\ \text{V/m}$。如果电位函数仅与 r 有关，试确定参考电位面的位置。

答案：$r=250\text{cm}$

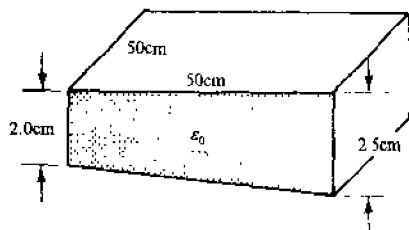


图 8-17

8.30 在球坐标系中，以无限远处为参考零电位，在 $r=0.22\text{m}$ 处 $V=45.0\text{V}$，区域 $0.22<r<1.00\text{m}$ 内有 $\epsilon_r=1.72$ 的电介

质,区域 $r>1.00\text{m}$ 为真空。试确定 $r=1.00\pm0\text{m}$ 处的 D。

答案:8.55V/m,14.7V/m

8.31 在图 8-18 中,相对于在 $\theta=30°$ 的圆锥面上的参考电位而言,$\theta=45°$ 的圆锥面上的电压为 V。在 $r=0.25\text{m}$ 和 $\theta=30°$ 处,$\mathbf{E}=-2.30\times10^3\mathbf{a}_\theta$ V/m。试确定两圆锥面的电位差 V。

答案:125.5V

8.32 在习题 8.31 中,如果在圆锥面之间有 $\varepsilon_r=2.45$ 的电介质,分别确定在 30°和 45°的导电圆锥面上的面电荷密度。

答案:$\dfrac{-12.5}{r}$ (nC/m²),$\dfrac{8.84}{r}$ (nC/m²)

8.33 如图 8-19 所示,求两个圆锥面之间区域内的 E。

答案:$\dfrac{0.288V_1}{r\sin\theta}$ (V/m)

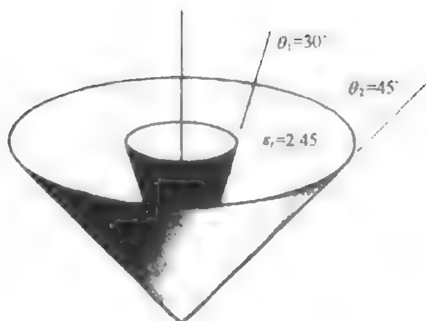


图 8-18

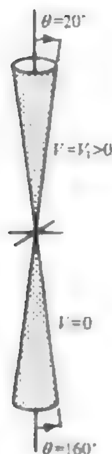


图 8-19

8.34 在圆柱坐标系中,$\rho=111/r$ (pC/m³)。已知在 $r=1.0\text{m}$ 处 $V=0$,在 $r=3.0\text{m}$ 处 $V=50V$,对于这种电荷分布,求 $\mathbf{E}$ 的表达式。

答案:$\left(12.5-\dfrac{68.3}{r}\right)\mathbf{a}_r$ (V/m)

8.35 假定在空间内有均匀电荷密度 ρ,试在球坐标系中由泊松方程求出 $\mathbf{E}$。

答案:$\left(\dfrac{\rho r}{3\varepsilon}-\dfrac{A}{r^2}\right)\mathbf{a}_r$

8.36 对于电荷均匀分布的球,分析习题 8.35 中的解。

答案:见习题 2.54

8.37 假设在圆柱坐标系中,电位仅是 r、z 的函数,而与 φ 无关,即 $V=R(r)Z(z)$。写出拉普拉斯方程并导出关于 r 和 z 分别满足的微分方程。验证关于 r 的方程的解是贝塞尔函数,关于 z 的方程的解是指数函数或者双曲函数。

8.38 证明勒让德多项式的前五项为

$$P_0(\cos\theta)=1$$

$$P_1(\cos\theta)=\cos\theta$$

$$P_2(\cos\theta)=\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)$$

$$P_3(\cos\theta)=\frac{1}{2}(5\cos^3\theta-3\cos\theta)$$

$$P_4(\cos\theta)=\frac{1}{8}(35\cos^4\theta-30\cos^2\theta+3)$$

对于 $\xi=\cos\theta$,作出它们的变化曲线。

答案:见图 8-20。

8.39 对于习题 8.18,求出 $\mathbf{E}$,并在图 8-14 中标出几个不同值的点。注意 $\mathbf{E}$ 和等位面的正交性。

答案:$\mathbf{E}=-V_0a[(\cosh az)(\sin az)\mathbf{a}_x+(\sinh ax)(\cos az)\mathbf{a}_z]$

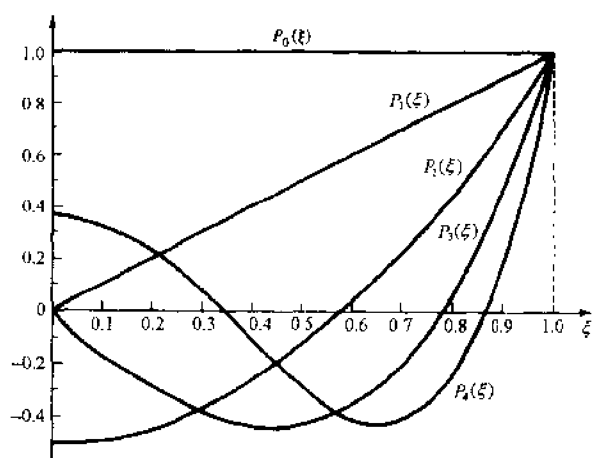


图 8-20

8.40 已知 $V=V_0(\cosh ax)(\sin ay)$，其中 $a>0$，试确定 $V=0$ 和 $V=V_0$ 的等位面的位置和形状，并画出类似图 8-14 的草图。

答案：见图 8-21。

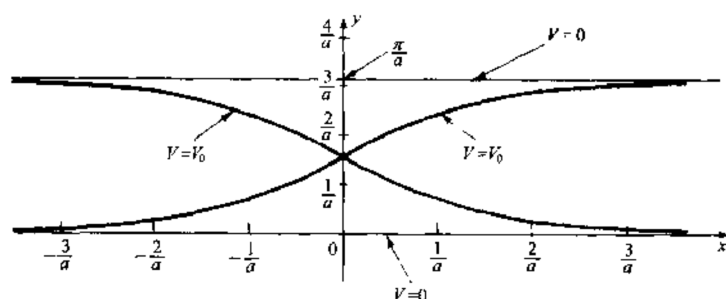


图 8-21

8.41 利用习题 8.40 的电位函数求出 $\mathbf{E}$，并在等位面的草图上(图 8-21)标出几个 $\mathbf{E}$ 值的位置。

答案：$\mathbf{E}=-V_0a[(\sinh ax)(\sin ay)\mathbf{a}_x+(\cosh ax)(\cos ay)\mathbf{a}_y]$

8.42 利用习题 8.17 中导出的乘积形式的解进行叠加，求出图 8-22 所示半圆环带域内的电位函数。

答案：$V=\sum_{n为奇数}\frac{4V_0}{n\pi}\frac{r^n-(a^2/r)^n}{b^n-(a^2/b)^n}\sin n\varphi$

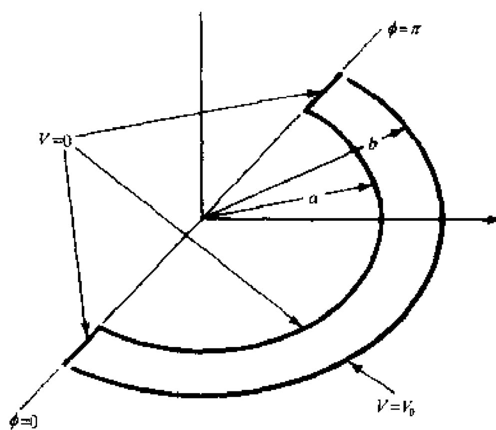


图 8-22

第9章 安培定律与磁场

9.1 引言

静磁场可以由稳恒电流产生，也可以由永久磁铁产生。这一章将论述由稳恒电流产生的磁场。在第12章和第13章中将探讨时变磁场，它是和时变电场并存的磁场。

9.2 毕奥-沙伐定律

由电流元 $Id\mathbf{l}$ 产生的**磁场强度**为 $d\mathbf{H}$。该场与距离的平方成反比，与周围的介质无关，其方向由矢量 $Id\mathbf{l}$ 和 $\mathbf{a}_R$ 的叉积所决定，这种关系就是**毕奥-沙伐定律**：

$$d\mathbf{H}=\frac{Id\mathbf{l}\times\mathbf{a}_R}{4\pi R^2}\quad(\text{A/m})$$

$\mathbf{R}$ 的方向必须是由电流元指向所要求的磁场为 $d\mathbf{H}$ 的点，如图9-1所示。

没有独立存在的电流元。组成整个线电流的所有电流元都对 $\mathbf{H}$ 有贡献，都应该包括在内。所有电流元产生的磁场满足毕奥-沙伐定律的积分形式：

$$\mathbf{H}=\oint\frac{Id\mathbf{l}\times\mathbf{a}_R}{4\pi R^2}$$

必须确保闭合的积分路线包括所有电流元(该积分周线也可以在∞处闭合)。

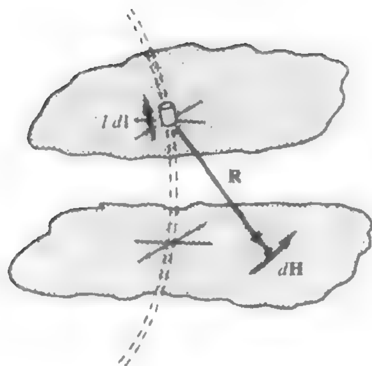


图9-1

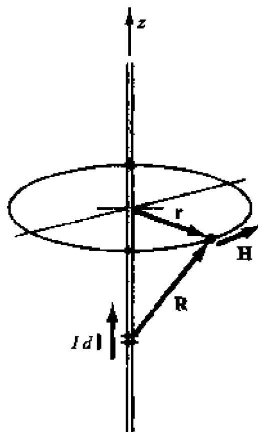


图9-2

例1 在圆柱坐标系中，有一个沿 z 轴的无限长直线电流 I，如图9-2所示。在平面 $z=0$ 上任选一点，该点微分形式的磁场强度为

$$d\mathbf{H}=\frac{Idz\ \mathbf{a}_z\times(r\ \mathbf{a}_r-z\ \mathbf{a}_z)}{4\pi(r^2+z^2)^{3/2}}=\frac{Idz\ r\ \mathbf{a}_\varphi}{4\pi(r^2+z^2)^{3/2}}$$

积分变量为 z。由于 $\mathbf{a}_\varphi$ 不随 z 变化，在积分之前可以把它从被积式中移出来，得

$$\mathbf{H}=\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Irdz}{4\pi(r^2+z^2)^{3/2}}\right]\mathbf{a}_\varphi=\frac{I}{2\pi r}\mathbf{a}_\varphi$$

这个重要的结论表明 $\mathbf{H}$ 和径向距离成反比，其方向服从“右手定则”，即用右手握住导线，大拇指指向电流的方向，则四指的指向就是磁场的方向。

例2 一无限大电流面位于平面 $z=0$ 上，$\mathbf{K}=K\mathbf{a}_y$，如图9-3所示。求 $\mathbf{H}$。

解 由毕奥-沙伐定律并考虑到对称性可知，$\mathbf{H}$ 只有 x 分量，而且不是 x 和 y 的函数。对正方形周线12341应用安培定律，并利用 $\mathbf{H}$ 关于 z 具有反对称性这个事实，得

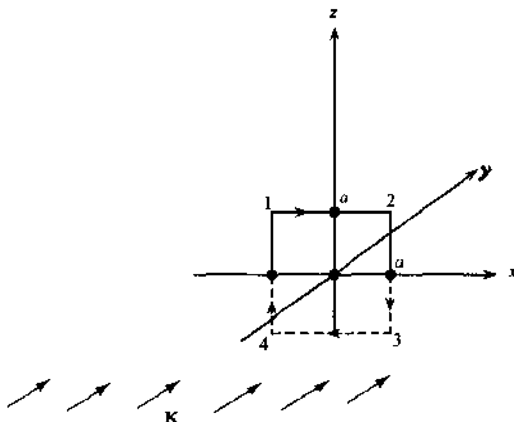


图 9-3

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = (H)(2a) + 0 + (H)(2a) + 0 = (K)(2a) \quad 或 \quad H = \frac{K}{2}$$

因此，对于所有 $z>0$，$\mathbf{H}=(K/2)\mathbf{a}_x$。更一般地，对于任意指定的电流面，有

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}\mathbf{K}\times\mathbf{a}_n$$

观察可知，**H** 与到面的距离无关。而且对该电流面上的电流元应用**右手定**则可以确定该面电流上方和下方 **H** 的方向。

9.3 安培定律

安培定律是指**磁场强度的切向分量沿闭合回路的线积分等于该回路包围的电流的大小**：

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = I_{被包围}$$

乍一看，人们会认为这个定律是用来通过积分求电流 I 的，事实上，由于电流往往是已知的，所以这个定律为求 **H** 提供了一种方法。这和给定电荷分布利用高斯定律求 **D** 十分相似。

为利用安培定律求 **H**，题目中必须存在一定程度的对称性，必须满足以下两个条件：

(1) 在闭合回路上任一点处，**H** 要么和回路相切，要么和回路垂直。

(2) **H** 和回路相切时，回路上的所有点的 H 都有相同的值。

在遇到以上情况时，可利用毕奥-沙伐定律选择积分路径。在大多数情况下，一个合适的路径还是显面易见的。

例 3　利用安培定律求由无限长直线电流 I 产生的 **H**。

解　毕奥-沙伐定律表明，图 9-2 中环路上任何一点的 **H** 都和环路相切，而且大小相等。这样

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = H(2\pi r) = I$$

所以

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r}\mathbf{a}_\varphi$$

9.4 旋度

矢量场 **A** 的**旋度**是另一个矢量场。图 9-4 中的点 P 位于面积为 ΔS 的平面内，该面以闭合曲线 C 为边界。在定义旋度的积分中，沿积分路径 C 移动时被 C 包围的面积应在你的左侧，所以可由**右**手定则确定单位法向矢量 $\mathbf{a}_n$，如图 9-4 所示。此时 **A** 的旋度在方向 $\mathbf{a}_n$ 上的分量定义为

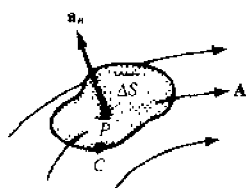


图 9-4

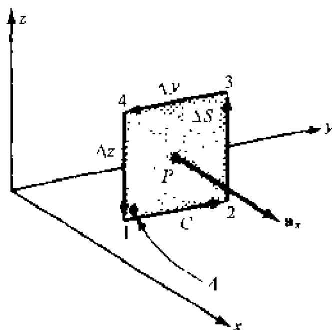


图 9-5

$$(\mathrm{curl}\mathbf{A})\cdot\mathbf{a}_n \equiv \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}}{\Delta S}$$

在坐标系中，A 的旋度完全可以由该矢量在三个单位矢量上的分量来表示。例如在笛卡儿坐标系中，如图 9-5 所示，可以在通过点 P 处的 x = const. 的平面中，取一个方形积分回路 C 来定义旋度的 x 分量，即

$$(\mathrm{curl}\mathbf{A})\cdot\mathbf{a}_x \equiv \lim_{\Delta y\Delta z\to 0}\frac{\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}}{\Delta y\Delta z}$$

在 ΔS 中靠近原点的角上（点 1），如果 $\mathbf{A}=A_x\,\mathbf{a}_x+A_y\,\mathbf{a}_y+A_z\,\mathbf{a}_z$，那么

$$\begin{aligned}\oint &= \int_1^2+\int_2^3+\int_3^4+\int_4^1\\ &= A_y\Delta y+\left(A_z+\frac{\partial A_z}{\partial y}\Delta y\right)\Delta z+\left(A_y+\frac{\partial A_y}{\partial z}\Delta z\right)(-\Delta y)+A_z(-\Delta z)\\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\Delta y\Delta z\end{aligned}$$

于是
$$(\mathrm{curl}\mathbf{A})\cdot\mathbf{a}_x=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}$$

同理可确定 y 和 z 方向上的分量。三个分量合起来，有

$$\mathrm{curl}\mathbf{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{a}_x+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{a}_y+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{a}_z\quad(\text{笛卡儿坐标系})$$

上式也可以写成一个三阶行列式，这就是 A 的笛卡儿旋度展开式：

$$\mathrm{curl}\mathbf{A}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$

第二行中的元素为算子▽的分量。这表明 A 的旋度可以写成▽×A 的形式（见 1.3 节）。尽管▽是在笛卡儿坐标系下定义的，但在其他坐标系中，和其他矢量分析的表达式一样，A 的旋度也可采用这个简易的表示法。

在圆柱坐标系和球坐标系中，A 的旋度表达式尽管比较复杂，但也可用上面的方法得到。具体表达式为

$$\begin{aligned}\mathrm{curl}\mathbf{A}&=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{a}_r+\left(\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\mathbf{a}_\varphi\\ &\quad+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right]\mathbf{a}_z\qquad(\text{圆柱坐标系})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{curl}\mathbf{A}&=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(A_\varphi\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\mathbf{a}_r+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right]\mathbf{a}_\theta\\ &\quad+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\mathbf{a}_\varphi\qquad(\text{球坐标系})\end{aligned}$$

通常用到的是旋度算子的两个特性：

(1) 对于任何矢量场 **A**，**旋度的散度是标量 0**，即

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

(2) 对于任何位置的标量函数 f，**梯度的旋度是矢量 0**(见习题 9.20)，即

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$$

在静态条件下，$\mathbf{E} = -\nabla V$，因此由(2)得

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

9.5 J 和 H 的关系

根据安培定律，$(\text{curl}\mathbf{H})_x$ 的定义式(见 9.4 节)又可以写为

$$(\text{curl}\mathbf{H}) \cdot \mathbf{a}_x = \lim_{\Delta y \Delta z \to 0} \frac{I_x}{\Delta y \Delta z} \equiv J_x$$

其中 $J_x = dI_x/dS$ 是 x 方向上电流的面密度。所以 **H** 的旋度的 x 分量和电流密度 **J** 的 x 分量处处相等。同理，y 和 z 分量也相等，这样

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

这是麦克斯韦方程组中关于静态场的一个方程。如果一个区域中的 **H** 已知，则 $\nabla \times \mathbf{H}$ 是这个区域中的 **J**。

例 4　一个截面半径为 a 的长直导体，其内部($r<a$)的磁场强度为 $\mathbf{H} = (rI/2\pi a^2)\mathbf{a}_\varphi$；当 $r>a$ 时，磁场强度为 $\mathbf{H} = (I/2\pi r)\mathbf{a}_\varphi$。求这两个区域中的 **J**。

解　在导体内部，电流密度为

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Ir}{2\pi a^2}\right)\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{Ir^2}{2\pi a^2}\right)\mathbf{a}_z = \frac{I}{\pi a^2}\mathbf{a}_z$$

它对应于在面积为 πa^2 的横截面上沿 $+z$ 方向均匀分布的电流，其值为 I。

在导体外部，电流密度为

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{I}{2\pi r}\right)\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{I}{2\pi}\right)\mathbf{a}_z = 0$$

9.6 磁通密度 B

和 **D** 一样，磁场强度 **H** 只与(运动的)电荷有关，而与介质无关。与 **H** 有关的力场是**磁通密度 B**，由下式给出：

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

其中 $\mu = \mu_0 \mu_r$ 是介质的**磁导率**，**B** 的单位是 T(特斯拉)，即

$$1\text{T} = 1\,\frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}}$$

自由空间的磁导率 μ_0 的数值为 $4\pi \times 10^{-7}$，单位为 H/m(亨/米)；μ_r 是介质的**相对磁导率**，除了一小部分**铁磁**物质以外，μ_r 都是非常接近于 1 的纯数，关于铁磁物质将在第 11 章中探讨。

穿过一个面的**磁通量** Φ 定义为

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

Φ 的符号可正可负，取决于面 $d\mathbf{S}$ 的法向的选取。磁通量的单位为 Wb(韦伯)。不同的磁场单位之间的关系为

$$1\text{T} = 1\ \text{Wb/m}^2, \qquad 1\text{H} = 1\ \text{Wb/A}$$

例 5　沿 z 轴并朝 $\mathbf{a}_z$ 方向的线电流为 2.50A。求通过平面 $\varphi = \pi/4$ 上由 $0.01 < r < 0.05$m 和 $0 < z < 2$m 所限定面积的磁通量(见图 9-6)。

解

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\mathbf{a}_\varphi$$

$$d\mathbf{S} = dr dz\ \mathbf{a}_\varphi$$

$$\Phi = \int_0^2 \int_{0.01}^{0.05} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{a}_\varphi \cdot dr dz\ \mathbf{a}_\varphi = \frac{2\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{0.05}{0.01}$$

$$= 1.61 \times 10^{-6}\ \text{Wb}\quad (\text{或 } 1.61\ \mu\text{Wb})$$

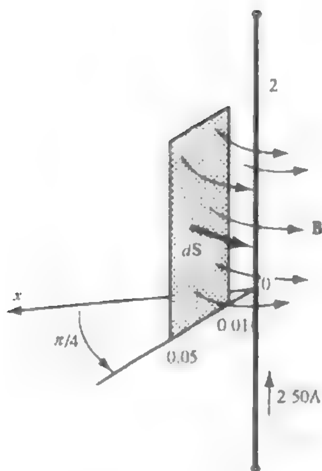


图 9-6

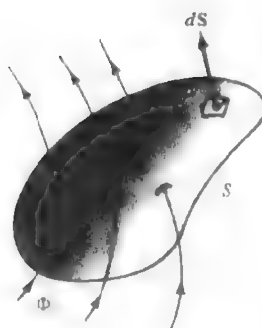


图 9-7

应当注意,磁通量 Φ 的线是闭合曲线,它没有起点也没有终点。它和电通量 Ψ 不同,Ψ 从正电荷出发到负电荷终止。如图 9-7 所示,所有进入该闭合面的磁通量 Φ 必须穿出这个面。所以场 **B** 无源也无洞,在数学上可表示为(见 4.1 节)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

9.7 矢量磁位 A

电场强度 **E** 最初是从已知电荷的分布得到的,后来出现了电位 V,并发现 **E** 可以由电位 V 的负梯度求得,即 $\mathbf{E} = -\nabla V$。拉普拉斯方程提供了一种由已知边界导体的电位求 V 的方法。同样,**矢量磁位 A** 可以定义为

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

把它作为中间量可求出 **B**,从而计算出 **H**。注意 **A** 的定义满足条件 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$。**A** 的单位为 Wb/m或 T·m。

如果强加条件

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

那么矢量磁位 **A** 可由所求区域中已知的电流来确定。以下是三种标准电流分布的 **A** 的表达式:

线电流 $$\mathbf{A} = \oint \frac{\mu I d\mathbf{l}}{4\pi R}$$

面电流 $$\mathbf{A} = \int_S \frac{\mu \mathbf{K} dS}{4\pi R}$$

体电流 $$\mathbf{A} = \int_v \frac{\mu \mathbf{J} dv}{4\pi R}$$

其中,R 是从电流元到所求矢量磁位的点的距离。与电位的积分类比(见 5.5 节),可知以上 **A** 的表达式是以在无穷远处 $\mathbf{A} = 0$ 为先决条件的,如果电流分布本身趋向于无穷远处,那么这些表达式是不适用的。

例 6 分析自由空间中无限长直线电流 I 的矢量磁位。

解 在图 9-8 中线电流沿 z 轴放置,观察点为 (x, y, z)。对于图中所示位于 $l = 0$ 处的特殊的电流元,有

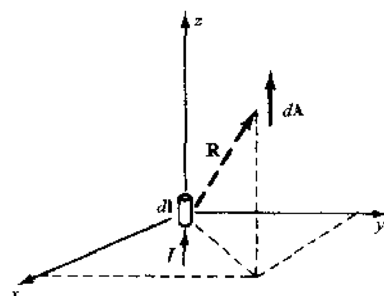


图 9-8

$$I d\mathbf{l} = I dl\ \mathbf{a}_z$$

其中 l 沿 z 轴变化。显然积分

$$\mathbf{A} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 I dl}{4\pi R}\ \mathbf{a}_z$$

不存在,因为当 l 很大时,$R \approx l$。这就是电流分布趋向于无穷远处的情况。

考虑微分矢量磁位

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi R}\ \mathbf{a}_z$$

由此可得到 $\mathbf{B}$ 的微分。对于位于 $l=0$ 处的特殊的电流元,因

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\ \mathbf{a}_z$$

所以
$$d\mathbf{B} = \nabla \times d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi}\left[\frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\ \mathbf{a}_x + \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\ \mathbf{a}_y\right]$$

这个结果和由毕奥-沙伐定律求得的结果 $d\mathbf{H} = (1/\mu_0) d\mathbf{B}$ 相同。

关于无限长直线电流的矢量磁位 $\mathbf{A}$ 的求解方法,可见习题9.17。

9.8 斯托克斯定理

考虑以闭合曲线 C 为边界的不闭合的曲面 S。**斯托克斯定理**表述为矢量场 $\mathbf{F}$ 的切向分量沿 C 的线积分等于 $\mathbf{F}$ 的旋度的法向矢量在 S 上的面积分:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$$

如果 $\mathbf{F}$ 为矢量磁位 $\mathbf{A}$,则斯托克斯定理变为

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \Phi$$

习 题 求 解

9.1 求边长为 L 的正方形电流回路中心处的 $\mathbf{H}$。

选取笛卡儿坐标系,回路如图 9-9 所示放置。由对称性可知,每个半条边对中心处 $\mathbf{H}$ 的贡献都是相同的。对于半条边 $0 \leqslant x \leqslant L/2$、$y = -L/2$,由毕奥-沙伐定律可给出原点处的磁场为

$$d\mathbf{H} = \frac{(I dx\ \mathbf{a}_x) \times [-x\ \mathbf{a}_x + (L/2)\mathbf{a}_y]}{4\pi[x^2 + (L/2)^2]^{3/2}} = \frac{I dx (L/2)\mathbf{a}_z}{4\pi[x^2 + (L/2)^2]^{3/2}}$$

原点处的总磁场为

$$\mathbf{H} = 8\int_0^{L/2} \frac{I dx (L/2)\mathbf{a}_z}{4\pi[x^2 + (L/2)^2]^{3/2}} = \frac{2\sqrt{2} I}{\pi L}\ \mathbf{a}_z = \frac{2\sqrt{2} I}{\pi L}\ \mathbf{a}_n$$

其中 $\mathbf{a}_n$ 是回路所在平面的单位法向矢量,它可由右手定则确定。

9.2 一线电流平行于 y 轴放置,位于 $x = 2\text{m}$、$z = -2\text{m}$ 处,电流沿 $\mathbf{a}_y$ 方向,大小为 5.0A(见图 9-10)。求原点处的 $\mathbf{H}$。

应用线电流的磁场 $\mathbf{H}$ 的表达式

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r}\ \mathbf{a}_\varphi$$

其中 $r = 2\sqrt{2}$ 和(应用右手定则)

$$\mathbf{a}_\varphi = \frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z}{\sqrt{2}}$$

可得

$$\mathbf{H} = \frac{0.05}{2\pi(2\sqrt{2})}\left(\frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z}{\sqrt{2}}\right) = (0.281)\left(\frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z}{\sqrt{2}}\right)\ \text{A/m}$$

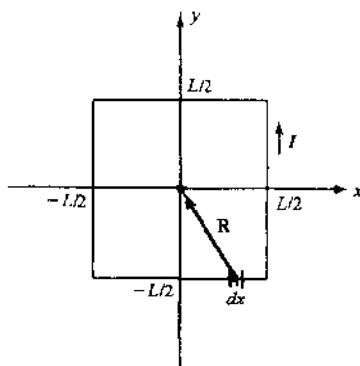


图 9-9

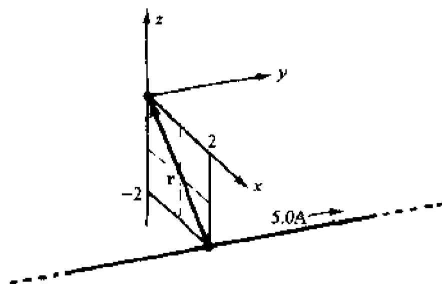


图 9-10

9.3 在平面 $x=5\text{m}$ 内有 $\mathbf{K}=10\ \mathbf{a}_z$ A/m 的面电流，在平面 $x=-5\text{m}$ 内有 $\mathbf{K}=-10\ \mathbf{a}_z$ A/m的面电流。求各点处的 $\mathbf{H}$。

██ 在图 9-11 中，显然对于每一个面电流，在两面之间任一点处都有 $\mathbf{K}\times\mathbf{a}_n=-K\mathbf{a}_y$。所以在区域 $-5<x<5$ 中，$\mathbf{H}=10(-\mathbf{a}_y)$ A/m，而在其他地方 $\mathbf{H}=\mathbf{0}$。

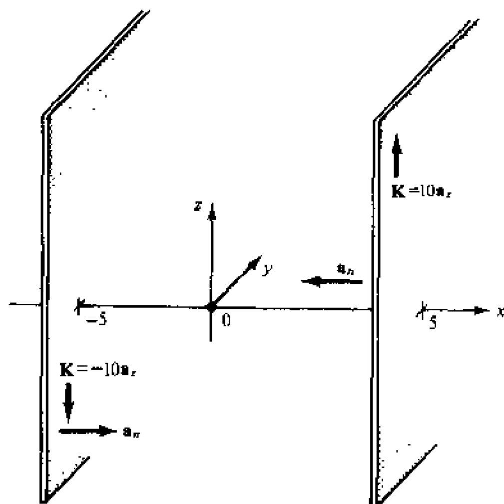


图 9-11

9.4 半径为 a 的无限长薄壁圆柱形导体载有电流 I。试利用安培定律求各点的 $\mathbf{H}$。

██ 根据毕奥-沙伐定律可知 $\mathbf{H}$ 只有 φ 分量，而且 H_φ 只是 r 的函数。对于安培定律，合适的路径是同心圆。对于图 9-12 中的路径 1，有

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=2\pi r H_\varphi=I_{\text{被包围的}}=0$$

对于路径 2，有

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=2\pi r H_\varphi=I$$

因此，对于圆柱导体壳内的点，$\mathbf{H}=\mathbf{0}$；对于圆柱导体壳外部的点，$\mathbf{H}=(I/2\pi r)\mathbf{a}_\varphi$，这和沿轴向的线电流 I 产生的磁场一样。

9.5 对于半径为 a 的实心圆柱导体，电流 I 在其横截面上均匀分布，确定 $\mathbf{H}$。

██ 对图 9-13 中的回路 1 应用安培定律，有

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I_{\text{被包围}}$$

$$H(2\pi r)=I\left(\frac{\pi r^2}{\pi a^2}\right)$$

$$\mathbf{H}=\frac{Ir}{2\pi a^2}\ \mathbf{a}_\varphi$$

对于圆柱外部的点，$\mathbf{H}=(I/2\pi r)\mathbf{a}_\varphi$。

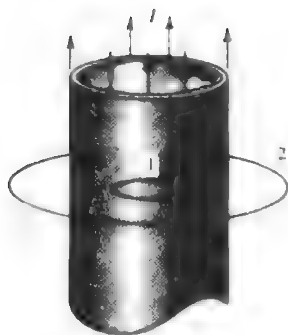


图 9-12

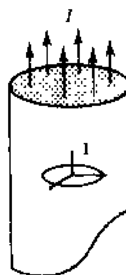


图 9-13

9.6 在圆柱坐标系的区域 $0<r<0.5\text{m}$ 中，电流密度为

$$\mathbf{J} = 4.5e^{-2r}\mathbf{a}_z$$

其他地方电流密度为 $\mathbf{J}=0$。用安培定律求 $\mathbf{H}$。

解 因为电流密度关于原点对称，所以利用安培定律时可选取圆形路径作为积分回路，被其包围的电流可由 $\oint \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}$ 给出。对于 $r<0.5\text{m}$，有

$$H_\varphi(2\pi r) = \int_0^{2\pi}\int_0^r 4.5e^{-2r} r dr d\varphi$$

$$\mathbf{H} = \frac{1.125}{r}(1 - e^{-2r} - 2re^{-2r})\,\mathbf{a}_\varphi \qquad (\text{A/m})$$

对于任何 $r\geqslant 0.5\text{m}$，圆形路径所包围的电流都相同，均为 0.549π A，所以

$$H_\varphi(2\pi r) = 0.594\pi \qquad \text{或} \qquad \mathbf{H} = \frac{0.297}{r}\mathbf{a}_\varphi \qquad (\text{A/m})$$

9.7 如图 9-14 所示，求半径为 a 的圆形电流回路的中心轴上的 $\mathbf{H}$，并给出回路中心处的 $\mathbf{H}$。

解 对如图 9-14 所示的点，因

$$\mathbf{R} = -a\mathbf{a}_r + h\mathbf{a}_z$$

所以

$$d\mathbf{H} = \frac{(Iad\varphi\,\mathbf{a}_\varphi)\times(-a\mathbf{a}_r + h\mathbf{a}_z)}{4\pi(a^2+h^2)^{3/2}} = \frac{(Iad\varphi)(a\mathbf{a}_z + h\mathbf{a}_r)}{4\pi(a^2+h^2)}$$

观察可知，在同一直径两端处方向相反的电流元产生的 H 的 r 分量抵消，所以

$$\mathbf{H} = \int_0^{2\pi}\frac{Ia^2 d\varphi}{4\pi(a^2+h^2)^{3/2}}\mathbf{a}_z = \frac{Ia^2}{2(a^2+h^2)^{3/2}}\mathbf{a}_z$$

在 $h=0$ 处，$\mathbf{H}=(I/2a)\mathbf{a}_z$。

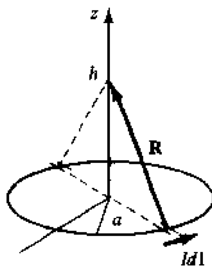


图 9-14

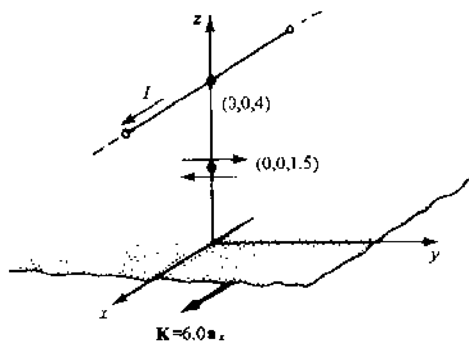


图 9-15

9.8 一面电流位于平面 $z=0$ 内，电流面密度为 $\mathbf{K}=6.0\,\mathbf{a}_x$ A/m；一线电流 I 位于 $y=0$、$z=4\text{m}$ 处，如图 9-15 所示。如果在点(0, 0, 15)m 处 $\mathbf{H}=\mathbf{0}$，试确定 I 的大小及其方向。

解 由面电流产生的磁场为

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}\mathbf{K}\times\mathbf{a}_n = \frac{6.0}{2}(-\mathbf{a}_y)\ \text{A/m}$$

由于在(0, 0, 15)m 处 $\mathbf{H}=\mathbf{0}$，所以由线电流产生的 $|\mathbf{H}|$ 必定为 3.0A/m。又

$$|\mathbf{H}| = \frac{I}{2\pi r}$$

所以

$$3.0 = \frac{I}{2\pi(2.5)}$$

$$I = 47.1 \text{ A}$$

要抵消由面电流产生的 H，线电流必须沿 $\mathbf{a}_z$ 方向，如图 9-15 所示。

9.9 已知 $\mathbf{A} = (y\cos ax)\mathbf{a}_x + (y + e^x)\mathbf{a}_z$，求原点处的 $\nabla\times\mathbf{A}$。



$$\nabla\times\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y\cos ax & 0 & y + e^x \end{vmatrix} = \mathbf{a}_x - e^x\mathbf{a}_y - \cos ax\ \mathbf{a}_z$$

在(0,0,0)处，$\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$。

9.10 在笛卡儿坐标系中，计算位于 z 轴、方向为 $\mathbf{a}_z$ 的线电流 I 产生的磁场 H 的旋度。

 从例 1 知

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r}\mathbf{a}_\varphi = \frac{I}{2\pi}\left(\frac{-y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y}{x^2 + y^2}\right)$$

因此除 $x = y = 0$ 以外，有

$$\nabla\times\mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\nabla\times\mathbf{H} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right)\right]\mathbf{a}_z = 0$$

这和 $\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J}$ 一致。

9.11 在圆柱坐标系中，已知矢量场 $\mathbf{A} = 5r\sin\varphi\ \mathbf{a}_z$。求点$(2, \pi, 0)$处 A 的旋度。

 因为 A 只有 z 分量，其旋度表达式只有两个非零部分。

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(5r\sin\varphi)\mathbf{a}_r - \frac{\partial}{\partial r}(5r\sin\varphi)\mathbf{a}_\varphi = 5\cos\varphi\ \mathbf{a}_r - 5\sin\varphi\ \mathbf{a}_\varphi$$

则

$$\nabla\times\mathbf{A}\,|_{(2,\pi,0)} = -5\mathbf{a}_r$$

9.12 在圆柱坐标系中，已知矢量场 $\mathbf{A} = 5e^{-r}\cos\varphi\ \mathbf{a}_r - 5\cos\varphi\ \mathbf{a}_z$。求点$(2, 3\pi/2, 0)$处 A 的旋度。



$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(-5\cos\varphi)\mathbf{a}_r + \left[\frac{\partial}{\partial z}(5e^{-r}\cos\varphi) - \frac{\partial}{\partial r}(-5\cos\varphi)\right]\mathbf{a}_\varphi$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(5e^{-r}\cos\varphi)\mathbf{a}_z = \left(\frac{5}{r}\sin\varphi\right)\mathbf{a}_r + \left(\frac{5}{r}e^{-r}\sin\varphi\right)\mathbf{a}_z$$

则

$$\nabla\times\mathbf{A}\,|_{(2,3\pi/2,0)} = -2.50\mathbf{a}_r - 0.34\mathbf{a}_z$$

9.13 在球坐标系中，已知矢量场 $\mathbf{A} = 10\sin\theta\ \mathbf{a}_\theta$，求点$(2, \pi/2, 0)$处的 $\nabla\times\mathbf{A}$。



$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[-\frac{\partial}{\partial\varphi}(10\sin\theta)\right]\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(10r\sin\theta)\mathbf{a}_\varphi = \frac{10\sin\theta}{r}\mathbf{a}_\varphi$$

则

$$\nabla\times\mathbf{A}\,|_{(2,\pi/2,0)} = 5\mathbf{a}_\varphi$$

9.14 一半径为 $r_0 = 1$cm 的圆形导体，其内部场为

$$\mathbf{H} = \frac{10^4}{r}\left(\frac{1}{a^2}\sin ar - \frac{r}{a}\cos ar\right)\mathbf{a}_\varphi \quad (\text{A/m})$$

式中 $a = \pi/2r_0$。求导体中的总电流。

 有两种求解方法：(1)计算 $\mathbf{J} = \nabla\times\mathbf{H}$，然后积分；(2)利用安培定律。第二种方法比较简单。

$$I_{\text{被包围}} = \oint_{r=r_0}\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi}\frac{10^4}{r_0}\left(\frac{4r_0^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{2r_0^2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}\right)r_0\,d\varphi$$

$$= \frac{8\times10^4 r_0^2}{\pi} = \frac{8}{\pi}\text{ A}$$

9.15 自由空间中存在一径向场 $\mathbf{H}=\dfrac{2.39\times10^6}{r}\cos\varphi\ \mathbf{a}_r$ (A/m)。求穿过由 $-\pi/4\leqslant\varphi\leqslant\pi/4$, $0\leqslant z\leqslant 1\text{m}$ 所限定面积的磁通量 Φ，见图 9-16。

$$\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}=\frac{3.00}{r}\cos\varphi\ \mathbf{a}_r\quad(\text{T})$$

$$\Phi=\int_0^1\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(\frac{3.00}{r}\cos\varphi\right)\mathbf{a}_r\cdot r d\varphi dz\mathbf{a}_r=4.24\ \text{Wb}$$

由于 **B** 和 r 成反比(由 $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ 所要求的)，所以无论径向距离取什么值，总磁通量均不变。

9.16 在圆柱坐标系中，$\mathbf{B}=(2.0/r)\mathbf{a}_\varphi$ (T)。确定通过由 $0.5\leqslant r\leqslant 2.5\text{m}$、$0\leqslant z\leqslant 2.0\text{m}$ 所限定面积的磁通量 Φ，见图 9-17。

$$\Phi=\int\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=\int_0^2\int_{0.5}^{2.5}\frac{2.0}{r}\mathbf{a}_\varphi\cdot drdz\ \mathbf{a}_\varphi=4.0\left(\ln\frac{2.5}{0.5}\right)=6.44\ \text{Wb}$$

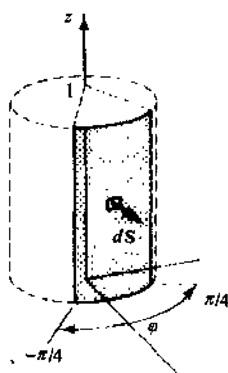


图 9-16

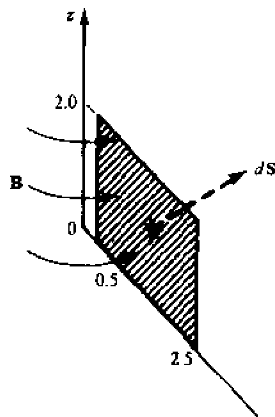


图 9-17

9.17 求包含长直线电流 I 的区域内的矢量磁位 **A**。

和例 6 一样，**A** 的积分表达式不能直接利用。但关系式

$$\nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\mathbf{a}_\varphi$$

却可以作为 **A** 的矢量微分方程。由于 **B** 只有 φ 分量，所以只需求圆柱坐标系中旋度的 φ 分量：

$$\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

显然，**A** 不可能是 z 的函数，因为电流在 z 方向上是均匀的。这样

$$-\frac{dA_z}{dr}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\qquad\text{或}\qquad A_z=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln r+C$$

积分常数应满足零参考点的位置，设 $r=r_0$ 时 $A_z=0$，则表达式成为

$$\mathbf{A}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)\mathbf{a}_z$$

9.18 求例 2 中面电流的矢量磁位 **A**。

对于 $z>0$，有

$$\nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{B}=\frac{\mu_0 K}{2}\mathbf{a}_x$$

据此

$$\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}=\frac{\mu_0 K}{2}$$

因为 **A** 一定和 x、y 无关，所以

$$-\frac{dA_y}{dz}=\frac{\mu_0 K}{2}\qquad\text{或}\qquad A_y=-\frac{\mu_0 K}{2}(z-z_0)$$

因此，对于 $z>0$，表达式为

$$\mathbf{A}=-\frac{\mu_0 K}{2}(z-z_0)\mathbf{a}_y=-\frac{\mu_0}{2}(z-z_0)\mathbf{K}$$

对于 $z<0$，改变上面表达式的符号即可。

9.19 用习题 9.18 所得的矢量磁位，求通过如图 9-18 所示的矩形面积的磁通量。

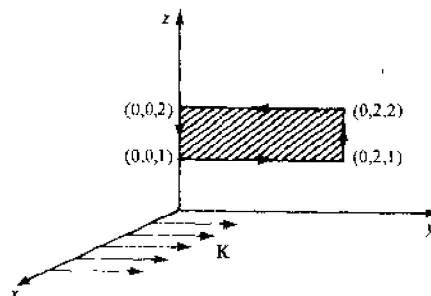


图 9-18

解　取 $z_0=2$ 为零参考点，则

$$\mathbf{A}=-\frac{\mu_0}{2}(z-2)\mathbf{K}$$

在线积分

$$\Phi=\oint\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$$

中，$\mathbf{A}$ 垂直于该周线的两个边，而在第三边（$z=2$）上为0。所以

$$\Phi=\int_{y=0}^{y=2}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}=-\frac{\mu_0}{2}(1-2)\int_0^2 Kdy=\mu_0 K$$

注意应选取合适的零参考点使计算简化。根据斯托克斯定理，决定 Φ 的是 $\nabla\times\mathbf{A}$ 而不是 $\mathbf{A}$ 本身，所以可以任意选取零参考点。

9.20　说明梯度的旋度为零。

解　根据9.4节中给出的 $\mathbf{A}$ 的旋度的定义，对于一个区域中的任何闭合曲线，如果

$$\oint\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}=0$$

则该区域内 $\mathbf{A}$ 的旋度为零。但是如果 $\mathbf{A}=\nabla f$，其中 f 为一单值函数，则

$$\oint\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}=\oint\nabla f\cdot d\mathbf{l}=\oint df=0$$

（见5.6节）

补　充　习　题

9.21　说明由图9-19所示的有限长直线电流产生的磁场为

$$\mathbf{H}=\frac{I}{4\pi r}(\sin\alpha_1-\sin\alpha_2)\mathbf{a}_\varphi$$

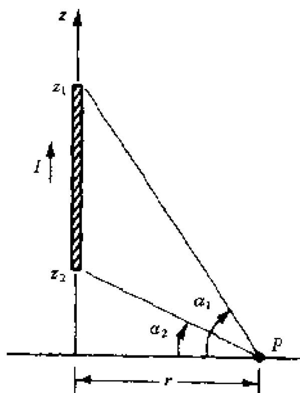


图 9-19

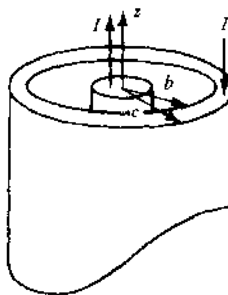


图 9-20

9.22　在球坐标系中，求在原点处指向 z 轴正向的电流元 $Id\mathbf{l}$ 在点 (r,θ,φ) 处产生的 $d\mathbf{H}$。

答案：$\dfrac{Idl\sin\theta}{4\pi r^2}\mathbf{a}_\varphi$

9.23　在图9-20中，电流在内部导体和外部导体上均匀分布。用安培定律说明，对于 $b\leqslant r\leqslant c$，$\mathbf{H}=\dfrac{I}{2\pi r}\left(\dfrac{c^2-r^2}{c^2-b^2}\right)\mathbf{a}_\varphi$。

9.24　在两个半径均为 $r=3$m 的圆形电流回路中，$I=20$ A，它们放置在两平行平面内，在共同的轴上相距10m。求两回路中点处的 $\mathbf{H}$。

答案：0.908 $\mathbf{a}_n$ A/m

9.25　电流为10A的线电流朝向 $+y$ 方向并沿 y 轴放置；$\mathbf{K}=2.0\mathbf{a}_x$（A/m）的面电流位于平面 $z=4$m 内。确定点(2,2,2)处的 $\mathbf{H}$。

答案：$0.398\mathbf{a}_x+1.0\mathbf{a}_y-0.398\mathbf{a}_z$(A/m)

9.26 说明$(x\mathbf{a}_x+y\mathbf{a}_y+z\mathbf{a}_z)/(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$的旋度为零。

(提示：$\nabla\times\mathbf{E}=\mathbf{0}$)

9.27 已知矢量$\mathbf{A}=(-\cos x)(\cos y)\mathbf{a}_z$，求原点处$\mathbf{A}$的旋度。

答案：0

9.28 已知矢量$\mathbf{A}=(\cos x)(\sin y)\mathbf{a}_x+(\sin x)(\cos y)\mathbf{a}_y$，求$\mathbf{A}$的旋度。

答案：0

9.29 在圆柱坐标系中，已知矢量$\mathbf{A}=(\sin 2\varphi)\mathbf{a}_\varphi$，求点$(2,\pi/4,0)$处$\mathbf{A}$的旋度。

答案：$0.5\mathbf{a}_z$

9.30 在圆柱坐标系中，已知矢量$\mathbf{A}=e^{-2z}(\sin\frac{1}{2}\varphi)\mathbf{a}_z$，求点$(0.008,\pi/3,0.500)$处$\mathbf{A}$的旋度。

答案：$0.368\mathbf{a}_r-0.230\mathbf{a}_z$

9.31 在球坐标系中，已知矢量$\mathbf{A}=(\sin\varphi)\mathbf{a}_r+(\sin\theta)\mathbf{a}_\varphi$，求点$(2,\pi/2,0)$处$\mathbf{A}$的旋度。

答案：0

9.32 在球坐标系中，已知矢量$\mathbf{A}=2.50\mathbf{a}_\theta+5.00\mathbf{a}_\varphi$，求点$(2.0,\pi/6,0)$处$\mathbf{A}$的旋度。

答案：$4.33\mathbf{a}_r-2.50\mathbf{a}_\theta+1.25\mathbf{a}_\varphi$

9.33 已知矢量

$$\mathbf{A}=\frac{2\cos\theta}{r^3}\mathbf{a}_r+\frac{\sin\theta}{r^3}\mathbf{a}_\theta$$

试说明$\mathbf{A}$的旋度处处为零。

9.34 半径为10^{-2}m圆柱形导体，其内部磁场为

$$\mathbf{H}=(4.77\times10^4)\left(\frac{r}{2}-\frac{r^2}{3\times10^{-2}}\right)\mathbf{a}_\varphi\ \text{(A/m)}$$

导体中的总电流是多少？

答案：5.0 A

9.35 在圆柱坐标系中的某一区域内$\mathbf{J}=10^5(\cos^2 2r)\mathbf{a}_z$。求该电流密度产生的$\mathbf{H}$，并把$\mathbf{H}$的旋度和$\mathbf{J}$比较。

答案：$\mathbf{H}=10^5\left(\frac{r}{4}+\frac{\sin 4r}{8}+\frac{\cos 4r}{32r}-\frac{1}{32r}\right)\mathbf{a}_\varphi$

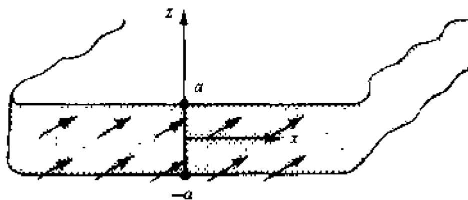


图 9-21

9.36 在笛卡儿坐标系的区域$-a\leqslant z\leqslant a$中，存在恒定的电流密度$\mathbf{J}=J_0\mathbf{a}_y$，见图9-21。用安培定律求各区域的$\mathbf{H}$，再求$\mathbf{H}$的旋度并和$\mathbf{J}$比较。

答案：$\mathbf{H}=\begin{cases}J_0a\mathbf{a}_x, & z>a\\ J_0z\mathbf{a}_x, & -a\leqslant z\leqslant a\\ -J_0a\mathbf{a}_x, & z<-a\end{cases}$

curl $\mathbf{H}=\mathbf{J}$

9.37 在圆柱坐标系中，区域$r\leqslant5\times10^{-2}$m中有

$$\mathbf{B}=\frac{0.2}{r}(\sin^2\varphi)\mathbf{a}_z\ \text{(T)}$$

计算通过平面$z=0$的总磁通量Φ。

答案：3.14×10^{-2} Wb

9.38 已知

$$\mathbf{B}=2.50\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)e^{-2y}\ \mathbf{a}_z\ \text{(T)}$$

求穿过由$z=0$、$y\geqslant0$、$0\leqslant x\leqslant2$m所确定的带形面积的磁通量。

答案：1.59 Wb

9.39 一同轴导体，其内部导体的半径为a，外部导体的内、外半径分别为b和c，通过内部导体的电流为I。求穿过两导体间φ为常数的平面内单位长度上的磁通量。

答案：$\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$

9.40 在自由空间中，均匀面电流$\mathbf{K}=K_0\mathbf{a}_y$位于$z=b>0$；另一均匀面电流$\mathbf{K}=K_0(-\mathbf{a}_y)$位于$z=-b$。求通过由$x$等于常数、$-2\leqslant z\leqslant2$、$0\leqslant y\leqslant L$所限定面积的磁通量。

答案：$4\mu_0 K_0 L$

9.41　根据习题9.17所得的矢量磁位，求沿 z 轴放置的线电流 I 产生的通过由 φ 等于常数、$r_1 \leqslant r \leqslant r_0$、$0 \leqslant z \leqslant L$ 所限定的矩形的磁通量。

答案：$\dfrac{\mu_0 IL}{2\pi}\ln\dfrac{r_0}{r_1}$

9.42　已知半径为 a 的圆柱形导体内的矢量磁位为

$$\mathbf{A} = -\frac{\mu_0 I r^2}{4\pi a^2}\mathbf{a}_z$$

求相应的 $\mathbf{H}$。

答案：$\mu_0 \mathbf{H} = \text{curl } \mathbf{A}$

9.43　均匀面电流 $\mathbf{K} = K_0(-\mathbf{a}_y)$ 位于 $x = 0$；另一均匀面电流 $\mathbf{K} = K_0 \mathbf{a}_y$ 位于 $x = a$。求两面电流之间区域的矢量磁位。

答案：$(\mu_0 K_0 x + c)\mathbf{a}_y$

9.44　z 为常数的平面位于习题9.43中的两面电流之间，求穿过该面内由 $0 \leqslant x \leqslant b$、$0 \leqslant y \leqslant a$ 所限定面积的磁通量，用 $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ 和 $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ 两种方法。

答案：$ab\mu_0 K_0$

第 10 章 磁场中的力和转矩

10.1 作用于粒子上的磁力

在磁场中，运动的带电粒子受到一个与其速度成直角的力，该力的大小与带电粒子的电量、速度和磁通密度成正比，完整的表达式由矢量的叉乘给出：

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{U} \times \mathbf{B}$$

可见，磁场可以改变粒子的运动方向，而不改变粒子运动的速度的大小 U，因此粒子的动能保持不变。这与有电场时的情况不同。在电场中，力 $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$ 对粒子做功，粒子的动能会改变。

如果场 $\mathbf{B}$ 在整个区域内是均匀的，且粒子有一个与场垂直的初速度，则粒子运动的路径是一个半径为 r 的圆周。场力的大小是 $F = |Q|UB$，方向朝向圆心，向心加速度的大小是 $\omega^2 r = U^2/r$。由牛顿第二定律，得

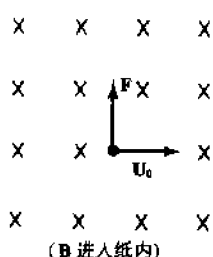


图 10-1

$$|Q|UB = m\frac{U^2}{r} \quad 或 \quad r = \frac{mU}{|Q|B}$$

例 1 质量为 1.70×10^{-27} kg、电量为 1.60×10^{-19} C 的粒子，以 83.5km/s 的初速度进入场 $B = 5$mT 中，求其所受的力。

解 只有已知 $\mathbf{B}$ 和粒子初速度 $\mathbf{U}_0$ 的方向才能计算力。这里假设 $\mathbf{U}_0$ 和 $\mathbf{B}$ 是垂直的，如图 10-1 所示，有

$$\begin{aligned} F &= |Q|UB \\ &= (1.60 \times 10^{-19})(83.5 \times 10^3)(5 \times 10^{-3}) \\ &= 6.68 \times 10^{-17}\ \text{N} \end{aligned}$$

例 2 对于例 1 中的粒子，求圆路径的半径和运动一周所需的时间。

解

$$r = \frac{mU}{|Q|B} = \frac{(1.70 \times 10^{-27})(83.5 \times 10^3)}{(1.60 \times 10^{-19})(5 \times 10^{-3})} = 0.177\text{m}$$

$$T = \frac{2\pi r}{U} = 13.3\ \mu\text{s}$$

10.2 电场和磁场共存的区域

当两类场同时出现在一个区域内时，作用在粒子上的力由下式给出

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B})$$

由这个**洛伦兹力**与初始条件一起确定了粒子的路径。

例 3 在坐标原点周围的某一区域内，$\mathbf{B} = 5.0 \times 10^{-4}\ \mathbf{a}_z$ T 和 $\mathbf{E} = 5.0\ \mathbf{a}_z$ V/m。一个质子（$Q_p = 1.602 \times 10^{-19}$C, $m_p = 1.673 \times 10^{-27}$kg）从原点以初速度 $\mathbf{U}_0 = 2.5 \times 10^5 \mathbf{a}_x$ m/s 进入区域内。试描述质子的运动并给出三个周期后质子的位置。

解 作用于质子上的初始力是

$$\mathbf{F}_0 = Q(\mathbf{E} + \mathbf{U}_0 \times \mathbf{B}) = Q_p(E\mathbf{a}_z - U_0 B\ \mathbf{a}_y)$$

力的 z 分量（电分量）是常量，且在 z 方向上产生一个恒定的加速度。因此，z 方向的运动方程是

$$z = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{Q_p E}{m_p}\right)t^2$$

另一个力分量 $-Q_p UB\mathbf{a}_r$（磁分量）产生了与 z 轴垂直的圆周运动，其周期为

$$T = \frac{2\pi r}{U} = \frac{2\pi m_p}{Q_p B}$$

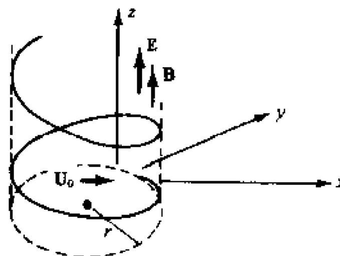


图 10-2

合成后的运动是螺旋状的，如图 10-2 所示。

三个周期后，$x = y = 0$，且

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{Q_pE}{m_p}\right)(3T)^2 = \frac{18\pi^2 Em_p}{Q_pB^2} = 37.0\ \text{m}$$

10.3　作用于电流元上的磁力

经常遇到的情况是在外磁场中存在载流导体。由于$I = dQ/dt$，微分力的方程可以写为

$$d\mathbf{F} = dQ(\mathbf{U}\times\mathbf{B}) = (Idt)(\mathbf{U}\times\mathbf{B}) = I(d\mathbf{l}\times\mathbf{B})$$

式中 $d\mathbf{l} = \mathbf{U}dt$ 是电流 I 方向上的微分元长度。如果导体是直的且场是常数，则力可通过积分求得，即

$$F = ILB\sin\theta$$

实际上磁力是作用于形成电流 I 的电子上的。然而，由于电子被限制在导体内，所以力被有效地转移到了大量的晶格上。这种转移力对导体做功。若忽略某些基本条件，则上述事实可解释电机中的载流导体的特性。这里和 10.4 节都没有提到电流源和要保持电流 I 为常量所需的能量，也没有应用法拉第电磁感应定律(12.3 节)。在电机理论中，将根据这些条件来修改这一结果。在第 12 章中还要论述磁场中存在运动导体的情况，见习题 12.10 和 12.13。

例 4　在长为 0.30m 的直导体中通有沿 $-\mathbf{a}_z$ 方向的电流 5.0A，这里场 $\mathbf{B} = 3.50\times10^{-3}\times(\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y)$T，求场作用在该导体上的力。

解

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= I(\mathbf{L}\times\mathbf{B})\\ &= (5.0)[(0.30)(-\mathbf{a}_z)\times 3.50\times10^{-3}(\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y)]\\ &= 7.42\times10^{-3}\left(\frac{-\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y}{\sqrt{2}}\right)\text{N}\end{aligned}$$

力的大小为 7.42 mN，方向与场 $\mathbf{B}$ 的方向、电流方向均垂直，如图 10-3 所示。

10.4　功和功率

以上分析了由场产生的作用在带电粒子和载流导体上的磁力。为了抵消这些力而使粒子处于平衡状态，必须施加一个等值反向的力 $\mathbf{F}_a$。如果粒子发生运动，则由外部施加的力对该系统所做的功可由下面的积分得出

$$W = \int_{\text{起点}}^{\text{终点}} \mathbf{F}_a \cdot d\mathbf{l}$$

积分结果大于零，表示外力施加在该系统上使粒子或导体从初始位置克服场力运动到终点位置。因为磁场力通常是非保守的，所以 $\mathbf{F}_a$ 也是非保守的，这就必须指明连接导体初始位值和终止位置的积分路径。

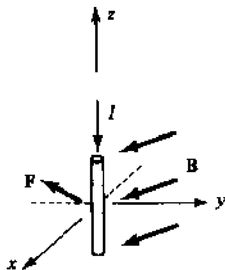


图 10-3



图 10-4

例 5　如图 10-4 所示，如果$\mathbf{B} = 2.50\times10$　$3\mathbf{a}_r$ T，电流是 45.0A，求将导体沿图示的方向在 0.02s 内移动一周需要做的功和功率。

解 $$\mathbf{F} = I(\mathbf{l} \times \mathbf{B}) = 1.13 \times 10^{-2}\,\mathbf{a}_\varphi\ \mathrm{N}$$

因此 $\mathbf{F}_a = -1.13\times10^{-2}\,\mathbf{a}_\varphi$ N,所以

$$W = \int \mathbf{F}_a \cdot d\mathbf{l}$$

$$= \int_0^{2\pi} (-1.13 \times 10^{-2})\mathbf{a}_\varphi \cdot rd\varphi\ \mathbf{a}_\varphi$$

$$= -2.13 \times 10^{-3}\ \mathrm{J}$$

和 $$P = W/t = -0.107\mathrm{W}$$

负号表明沿图示方向移动导体时磁场要做功。沿反方向移动导体时,不需在 $rd\varphi\ \mathbf{a}_\varphi$ 前加负号,只需颠倒积分限即可,这将改变 W 的符号。

10.5 转矩

特定点的**力矩**或**转矩**定义为关于该点的**杠杆臂**和力的叉乘,杠杆臂 $\mathbf{r}$ 的方向是从获得转矩的点指向施力点。在图 10-5 中,点 P 处的力产生的关于点 O 的转矩由下式给出:

$$\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

上式中 $\mathbf{T}$ 的单位为 N·m(为了将转矩和能量的单位区分开,建议用单位 N·m/rad。)

在图 10-5 中,T 沿通过点 O 的一个轴(在平面 xy 内)。如果用装在点 O 枢轴上的可自由转动的刚棒将点 P 和点 O 连接起来,那么,外加力将企图使刚棒关于那个轴旋转。转矩 $\mathbf{T}$ 应被表述成**关于那个轴的**,而不是**关于点 O 的**。

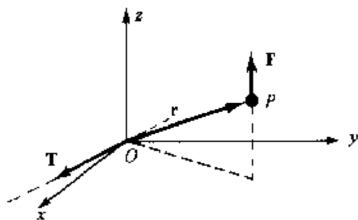


图 10-5

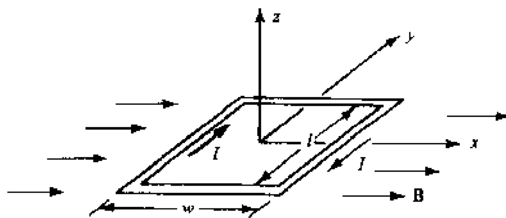


图 10-6

例 6 一导体位于 $x=0.4$m、$y=0$ 和 $0<z<2.0$m 区段内,在该导体中通以 $\mathbf{a}_z$ 方向的电流 5.0A,沿导体的场为 $\mathbf{B}=2.5\mathbf{a}_x$T。求关于 z 轴的转矩。

解 $$\mathbf{F} = I(\mathbf{L} \times \mathbf{B}) = 5.0(2.0\mathbf{a}_z \times 2.5\mathbf{a}_x) = 25.0\ \mathbf{a}_y\ \mathrm{N}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0.4\mathbf{a}_x \times 25.0\mathbf{a}_y = 10.0\ \mathbf{a}_z\ \mathrm{N \cdot m}$$

10.6 平面线圈的磁矩

考虑在平面 $z=0$ 内、沿 x 方向上宽为 w、沿 y 方向上长为 l 的单匝线圈,如图 10-6 所示。沿 $+x$ 方向的场 $\mathbf{B}$ 是均匀的,仅 $\pm y$ 方向上的电流受力。对于线圈左侧边,有

$$\mathbf{F} = I(l\mathbf{a}_y \times B\mathbf{a}_x) = -BIl\ \mathbf{a}_z$$

对于线圈右侧边,有

$$\mathbf{F} = BIl\ \mathbf{a}_z$$

左侧边关于 y 轴的转矩需利用杠杆臂 $\mathbf{r}=-(w/2)\mathbf{a}_x$ 求得;右侧边关于 y 轴的转矩需利用杠杆臂 $\mathbf{r}=(w/2)\mathbf{a}_x$ 求得。由这两部分组成的转矩是

$$\mathbf{T} = \left(-\frac{w}{2}\right)\mathbf{a}_x \times (-BIl)\mathbf{a}_z + \left(\frac{w}{2}\right)\mathbf{a}_x \times BIl\mathbf{a}_z = BIlw(-\mathbf{a}_y) = BIA(-\mathbf{a}_y)$$

式中 A 是线圈的面积。可以看出转矩表达式对任意形状的平面线圈(与 y 轴平行的任何轴)都成立。

平面电流环的**磁矩** $\mathbf{m}$ 被定义为 $IA\ \mathbf{a}_n$,其中单位法向矢量 $\mathbf{a}_n$ 由右手定则确定(大拇指指向 $\mathbf{a}_n$ 的方向,其他手指指向电流的方向)。根据下式可知,平面线圈的转矩与外加场有关:

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

磁矩的概念是理解沿轨道运行的带电粒子特性的基础。例如，如图10-7所示，以速度 U 或以角速度 ω 在圆周轨道上运行的正电荷 Q 等价于电流 $I = (\omega/2\pi)Q$，因此它的磁矩为

$$\mathbf{m} = \frac{\omega}{2\pi}QA\ \mathbf{a}_n$$

对于目前的讨论，更重要的情况是在磁场 $\mathbf{B}$ 中存在一转矩 $\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$，它使电流环转动，直到 $\mathbf{m}$ 和 $\mathbf{B}$ 同向时为止，此时转矩变为零。

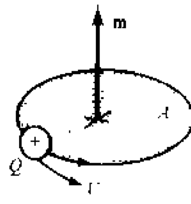


图 10-7

习 题 求 解

10.1 长为4m的直导体沿 y 轴放置，其中通以 $\mathbf{a}_y$ 方向的电流10.0A。如果在这一区域中 $\mathbf{B} = 0.05\mathbf{a}_x T$，求作用在导体上的力。

解
$$\mathbf{F} = I\mathbf{L} \times \mathbf{B} = 10.0(4\mathbf{a}_y \times 0.05\mathbf{a}_x) = -2.0\ \mathbf{a}_z\ \mathrm{N}$$

10.2 长为2.5m的导体位于 $z = 0$、$x = 4\mathrm{m}$ 处，其中通以 $-\mathbf{a}_y$ 方向的电流12.0A。如果沿方向 $(-\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z)/\sqrt{2}$ 对导体的作用力是 1.20×10^{-2} N，求均匀场 $\mathbf{B}$。

解 由 $\mathbf{F} = I\mathbf{L} \times \mathbf{B}$，得

$$(1.20 \times 10^{-2})\left(\frac{-\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z}{\sqrt{2}}\right) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 0 & -(12.0)(2.5) & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$
$$= -30B_z\ \mathbf{a}_x + 30B_x\ \mathbf{a}_z$$

据此
$$B_z = B_x = \frac{4 \times 10^{-4}}{\sqrt{2}}\ \mathrm{T}$$

$\mathbf{B}$ 的 y 分量可为任意值。

10.3 如图10-8所示，宽为2cm的电流带中通有 $\mathbf{a}_x$ 方向的电流15.0A。如果均匀场 $\mathbf{B} = 0.20\mathbf{a}_y$T，求作用在该电流带上每单位长度上的力。

解 在 $d\mathbf{F}$ 的表达式中，$Id\mathbf{l}$ 由 $\mathbf{K}dS$ 代替，可得

$$d\mathbf{F} = (\mathbf{K}dS) \times \mathbf{B} = \left(\frac{15.0}{0.02}\right) dxdy(0.20)\mathbf{a}_z$$
$$\mathbf{F} = \int_{-0.01}^{0.01}\int_0^L 150.0 dxdy\ \mathbf{a}_z$$
$$\frac{\mathbf{F}}{L} = 3.0\ \mathbf{a}_z\ \mathrm{N/m}$$

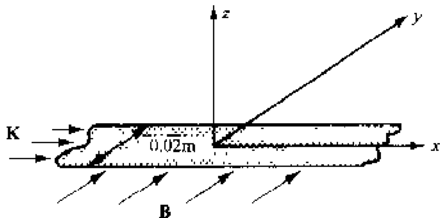


图 10-8

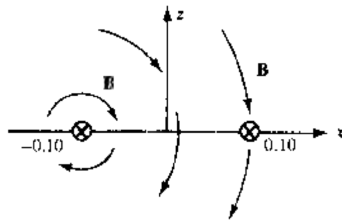


图 10-9

10.4 求两个长直平行导体上每单位长度上的力，在两个导体内通以同方向的电流10.0A，两导体间的距离为0.20m。

解 如图10-9所示，导体排列在笛卡儿坐标系中。左边导体在右边导体所在处产生的场的大小是

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(10.0)}{2\pi(0.20)} = 10^{-5}\ \mathrm{T}$$

其方向是 $-\mathbf{a}_z$。它对右边导体的作用力是

$$\mathbf{F} = IL\mathbf{a}_y \times B(-\mathbf{a}_z) = ILB(-\mathbf{a}_x)$$

并且
$$\frac{\mathbf{F}}{L} = 10^{-4}(-\mathbf{a}_x)\ \mathrm{N/m}$$

与此力等值反向的力作用于左边导体上。可见，场产生的力是引力，即通以相同方向电流的两个平行导体将产生企图使两导体吸引到一起的力。

10.5 如图 10-10 所示，一导体内通以电流 I，它平行于密度为 K_0、宽为 w 的电流带。求导体每单位长度上受力的表达式。当电流带的宽 w 趋向无穷大时，结果如何？

■ 如图 10-10 所示，由习题 10.4，细电流 K_0dx 对导体施加一个引力：

$$\frac{d\mathbf{F}}{L} = IB\ \mathbf{a}_r = I\frac{\mu_0(K_0dx)}{2\pi r}\ \mathbf{a}_r$$

由于在 $-x$ 处有相同的细电流，所以导体的引力在 x 方向上的分量抵消，合成的结果是

$$\frac{d\mathbf{F}}{L} = I\frac{\mu_0(K_0dx)}{2\pi r}\left(2\frac{h}{r}\right)(-\mathbf{a}_z) = \frac{\mu_0 IK_0h}{\pi}\frac{dx}{h^2+x^2}(-\mathbf{a}_z)$$

对此电流带的一半积分，得

$$\frac{\mathbf{F}}{L} = \frac{\mu_0 IK_0h}{\pi}(-\mathbf{a}_z)\int_0^{w/2}\frac{dx}{h^2+x^2} = \left(\frac{\mu_0 IK_0}{\pi}\arctan\frac{w}{2h}\right)(-\mathbf{a}_z)$$

此力是引力，和预期的一样。

当带宽趋向无穷大时，$\mathbf{F}/L \to (\mu_0 IK_0/2)(-\mathbf{a}_z)$。

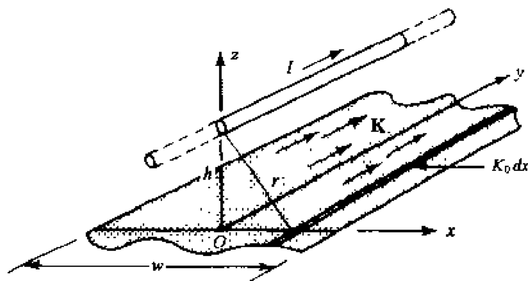


图 10-10

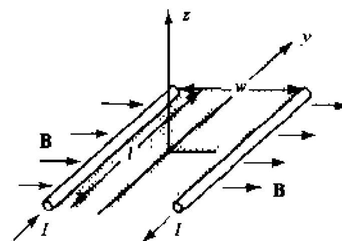


图 10-11

10.6 如图 10-11 所示，在均匀场 $\mathbf{B}$ 中，两个长为 l 的平行导体相距 w，求它们关于 y 轴的转矩。

■ 左边导体受的力为

$$\mathbf{F}_1 = Il\mathbf{a}_y \times B\mathbf{a}_x = BIl(-\mathbf{a}_z)$$

它的转矩是

$$\mathbf{T}_1 = \frac{w}{2}(-\mathbf{a}_x) \times BIl(-\mathbf{a}_z) = BIl\frac{w}{2}(-\mathbf{a}_y)$$

作用在右边导体上的力产生同样的转矩。因此，总和是

$$\mathbf{T} = BIlw(-\mathbf{a}_y)$$

10.7 达松伐耳仪表的传动机构具有一个 $B = 0.10\mathrm{T}$ 的均匀径向场和一个转矩为 $T = 5.87\times10^{-5}\theta(\mathrm{N\cdot m})$ 的恢复弹簧，此处转角 θ 以弧度表示。线圈有 35 匝、尺寸为 23mm × 17mm。线圈中通以电流 15mA 时产生的转矩为多少？

■ 图 10-12 中的柱形片在有限偏转角范围内产生一个均匀的径向场。假设整个线圈在场中产生的转矩是

$$T = nBIlw = 35(0.10)(15\times10^{-3})(23\times10^{-3})(17\times10^{-3}) = 2.05\times10^{-5}\mathrm{N\cdot m}$$

线圈一直转到此转矩等于弹簧的转矩时为止，这样

$$2.05\times10^{-5} = 5.87\times10^{-5}\theta$$
$$\theta = 0.349\mathrm{rad}(\text{或者 } 20^\circ)$$

10.8 在图 10-13 中，矩形线圈处于场

$$\mathbf{B} = 0.05\frac{\mathbf{a}_x+\mathbf{a}_y}{\sqrt{2}}\mathrm{T}$$

中，当线圈在图示位置且通以电流 5.0A 时，求关于 z 轴的转矩。

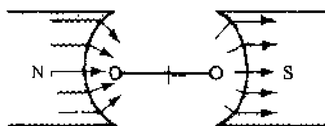


图 10-12

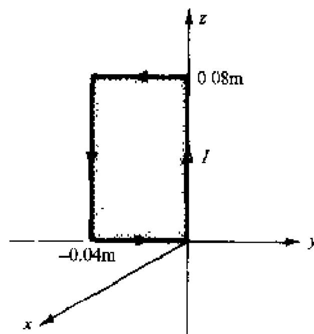


图 10-13

$$\mathbf{m} = IA\mathbf{a}_n = 1.60\times10^{-2}\mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{m}\times\mathbf{B} = 1.60\times10^{-2}\mathbf{a}_x\times0.05\frac{\mathbf{a}_x+\mathbf{a}_y}{\sqrt{2}}$$

$$= 5.66\times10^{-4}\,\mathbf{a}_z\ \mathrm{N\cdot m}$$

如果线圈转过 45°，m 的方向是$(\mathbf{a}_x+\mathbf{a}_y)/\sqrt{2}$，转矩将成为零。

10.9　在场 $B=6.5\mathrm{T}$ 中，给 0.2m×0.3m 的 85 匝矩形线圈通以电流 2.0A，求该线圈的最大转矩。

$$T_{\max} = nBI\ell w = 85(6.5)(2.0)(0.2)(0.3) = 66.3\ \mathrm{N\cdot m}$$

10.10　如果一个电量为 1.602×10^{-19}C 的电荷在场 $B=0.4\times10^{-3}$T 中沿半径为0.5×10^{-10}m 的圆周路径运动，电荷运动的角速度是 4.0×10^{16}rad/s，求场对这一圆周轨道作用的最大转矩。

沿轨道运动的电荷有一磁矩

$$\mathbf{m} = \frac{\omega}{2\pi}QA\,\mathbf{a}_n = \frac{4\times10^{16}}{2\pi}(1.602\times10^{-19})\pi(0.5\times10^{-10})^2\mathbf{a}_n$$

$$= 8.01\times10^{-24}\,\mathbf{a}_n\ \mathrm{A\cdot m^2}$$

当 $\mathbf{a}_n$ 与 $\mathbf{B}$ 垂直时，产生的转矩最大，有

$$T_{\max} = mB = 3.20\times10^{-27}\ \mathrm{N\cdot m}$$

10.11　在长为 4m 的直导体中通以 $\mathbf{a}_y$ 方向的电流 10A，将该导体放于 y 轴上 $y=\pm2$m 之间。如果场 $\mathbf{B}=0.05\mathbf{a}_x$T，求以恒速将导体平移到 $x=z=2$m 处做的功。

对于整个运动过程，磁场力为

$$\mathbf{F} = I\mathbf{L}\times\mathbf{B} = -2.0\,\mathbf{a}_z$$

外施力与此力是等值反向的，从而外施力为

$$\mathbf{F}_a = 2.0\mathbf{a}_z$$

因为力是常数且保守，所以可将导体先沿 z 轴移动，然后沿 x 轴移动，如图 10-14 所示。由于 $\mathbf{F}_a$ 完全是在 z 轴方向上，沿 x 轴运动时不做功，故

$$W = \int_0^2(2.0\mathbf{a}_z)\cdot dz\mathbf{a}_z = 4.0\ \mathrm{J}$$

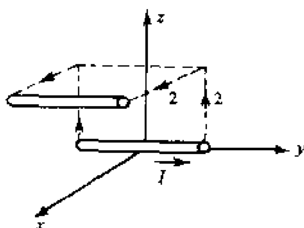


图 10-14

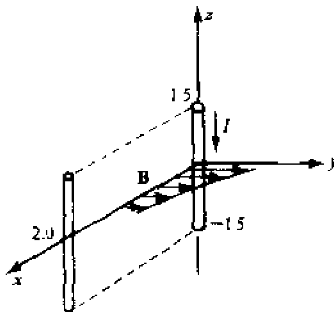


图 10-15

10.12 一导体位于 z 轴上区域 $-1.5\leqslant z\leqslant 1.5$m 中，其中通以 $-\mathbf{a}_z$ 方向的电流 10.0A，见图 10-15。导体周围的场是

$$\mathbf{B} = 3.0\times 10^{-4}e^{-0.2x}\,\mathbf{a}_y(\mathrm{T})$$

求在时间 5×10^{-3}s 内将此导体以恒速移到 $x=2.0$m 和 $y=0$ 处外力需要做的功和功率。假设沿 x 轴平行移动。

解　$\mathbf{F} = I\mathbf{L}\times\mathbf{B} = 9.0\times 10^{-3}e^{-0.2x}\,\mathbf{a}_x$

则 $\mathbf{F}_a = -9.0\times 10^{-3}e^{-0.2x}\mathbf{a}_x$ 和

$$W = \int_0^2 (9.0\times 10^{-3}e^{-0.2x}\,\mathbf{a}_x)\cdot dx\,\mathbf{a}_x = -1.48\times 10^{-2}\,\mathrm{J}$$

场使导体运动，因此功是负的。由下式得功率

$$P = \frac{W}{t} = \frac{-1.48\times 10^{-2}}{5\times 10^{-3}} = 2.97\,\mathrm{W}$$

10.13 如图 10-16 所示，如果 $\mathbf{B}=B_0\mathbf{a}_r$（$B_0$ 是正常数），求使导体以每分钟 N 转的转速沿正方向转动一周外力做的功和功率。

解　场作用在导体上的力是

$$\mathbf{F} = I\mathbf{L}\times\mathbf{B} = IL\mathbf{a}_z\times B_0\mathbf{a}_r = B_0IL\,\mathbf{a}_\varphi$$

施加的外力是

$$\mathbf{F}_a = B_0IL(-\mathbf{a}_\varphi)$$

导体沿 $\mathbf{a}_\varphi$ 方向转动。因此，使导体转动一个周期需要做的功是

$$W = \int_0^{2\pi} B_0IL(-\mathbf{a}_\varphi)\cdot r d\varphi\,\mathbf{a}_\varphi = 2\pi rB_0IL$$

功率是

$$P = -\frac{2\pi rB_0ILN}{60}$$

功和功率中的负号表明了场做负功。绕闭合路径做功表明在这种情况下力是非保守的。

10.14 如图 10-16 所示的结构中，导体长 10mm，其中通以 $\mathbf{a}_z$ 方向的恒定电流 5.0A。如果场是

$$\mathbf{B} = -3.5\sin\varphi\,\mathbf{a}_r\,\mathrm{mT}$$

且 $r=25$mm，求以图示方向将导体以恒速从 $\varphi=0$ 移到 $\varphi=\pi$ 处所做的功。如果电流方向被颠倒，导体位于 π 和 2π 之间，求一个周期需要做的总功是多少？

解　$\mathbf{F} = I\mathbf{L}\times\mathbf{B} = -1.75\times 10^{-3}\sin\varphi\,\mathbf{a}_\varphi\,\mathrm{N}$

$$\mathbf{F}_a = 1.75\times 10^{-3}\sin\varphi\,\mathbf{a}_\varphi\,\mathrm{N}$$

则

$$W = \int_0^{\pi} 1.75\times 10^{-3}\sin\varphi\,\mathbf{a}_\varphi\cdot r d\varphi\,\mathbf{a}_\varphi = 87.5\,\mu\mathrm{J}$$

当导体在 π 和 2π 之间时，如果改变电流方向，所做功将是不变的。一个周期做的总功是 175 μJ。

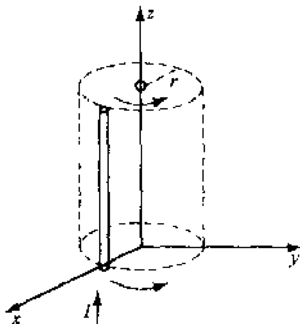


图 10-16

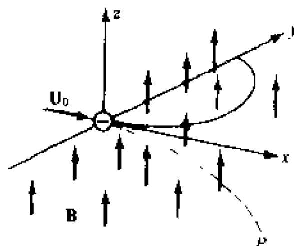


图 10-17

10.15 计算使一个电子（$m_e=9.107\times 10^{-31}$kg）沿半径为 0.35×10^{-10}m 的轨道以角速度 2×10^{16}rad/s 运动所需的向心力。

解

$$F = m_e\omega^2 r = (9.107\times 10^{-31})(2\times 10^{16})^2(0.35\times 10^{-10}) = 1.27\times 10^{-8}\,\mathrm{N}$$

10.16　如图10-17所示，在区域 $x \geqslant 0$ 内存在一均匀场 $\mathbf{B} = 85.3\ \mathbf{a}_z\ \mu\text{T}$。如果一个电子在原点以 $\mathbf{U}_0 = 450\mathbf{a}_y\ \text{km/s}$ 的速度进入该场，求它所处的位置。一个质子以同样的初速度进入该场时，求它所处的位置。

解　$r_e = \dfrac{m_e U_0}{|Q|B} = 3.00 \times 10^{-2}\text{m}$

电子受到一个 $\mathbf{a}_x$ 方向上的初始力，它位于场中 $x = z = 0$、$y = 6\text{cm}$ 处。质子将转向其他方向，在图10-17中显示了点 P 处的部分圆周路径。由于 $m_p = 1840m_e$，所以

$$r_p = \frac{m_p}{m_e} r_e = 55\text{m}$$

质子位于 $x = z = 0$、$y = -110\text{m}$ 处。

10.17　如果将一个质子固定于某一位置，有一电子关于它沿半径为 $0.35 \times 10^{-10}\text{m}$ 的圆周路径转动，质子所在处的磁场是多大？

解　根据库仑力的表达式，质子和电子之间的吸引力为

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

它为圆周运动提供了向心力。这样

$$\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = m_e \omega^2 r \qquad 或者 \qquad \omega^2 = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r^3}$$

电子等价于一个电流为 $I = (\omega/2\pi)Q$ 的电流环，由习题9.7，在这样一个环的中心处的场是

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I}{2r} = \frac{\mu_0 \omega Q}{4\pi r}$$

把上面的 ω 值代入，得

$$B = \frac{(\mu_0/4\pi)Q^2}{r^2\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m_e r}}$$

$$= \frac{(10^{-7})(1.6 \times 10^{-19})^2}{(0.35 \times 10^{-10})^2\sqrt{\left(\dfrac{1}{9} \times 10^{-9}\right)(9.1 \times 10^{-31})(0.35 \times 10^{-10})}} = 35\ \text{T}$$

补　充　习　题

10.18　长为2m的电流段沿 y 轴放置，其中心在原点，导体中有沿 $\mathbf{a}_y$ 方向的电流5.0A。如果由于均匀场 $\mathbf{B}$ 的存在，使该电流段受到一个 $1.50(\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z)/\sqrt{2}\text{N}$ 的力，试确定 $\mathbf{B}$。

答案：$0.106(-\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z)\text{T}$

10.19　$\mathbf{B} = 3.5 \times 10^{-2}\mathbf{a}_z\ \text{T}$ 的磁场对沿 x 轴放置的长为0.30m的导体施加一个力。如果在导体中通以 $\mathbf{a}_x$ 方向的电流5.0A，求使导体保持在该位置时需要施加的力是多少？

答案：$-5.25 \times 10^{-2}\mathbf{a}_y\ \text{N}$

10.20　$\mathbf{K} = 30.0\mathbf{a}_y\ \text{A/m}$ 的电流面位于平面 $z = -5\text{m}$ 内，而通以 $\mathbf{a}_y$ 方向的电流5.0A的细导体位于 y 轴上。求单位长度上的力。

答案：$94.2\mu\text{N/m}$　（吸引）

10.21　如图10-18所示，通有电流 I 的导体垂直穿过一个平面电流面 $\mathbf{K}$。求电流面对平面上方和平面下方的导体每单位长度上施加的力。

答案：$\pm \mu_0 KI/2$

10.22　与 z 轴重合的长为2m的导体内通以 $\mathbf{a}_z$ 方向的电流5.0A，设场 $\mathbf{B} = 2.0\mathbf{a}_x + 6.0\mathbf{a}_y\ \text{T}$，求对此导体施加的力。

答案：$-60\mathbf{a}_x + 20\mathbf{a}_y\ \text{N}$

10.23　均具有恒定密度 K_0 的两个无限大电流面平行放置，且电流方向相反。求作用在平面上单位面积的力。力是斥力还是引力？

答案：$\mu_0 K_0^2/2$　（斥力）

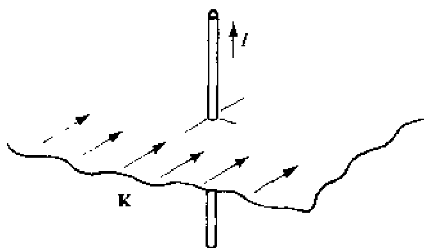


图10-18

10.24　如图10-19所示，在平面 $z = h$ 内的电流圆环与平面

$z=0$内一个 $\mathbf{K}=K_0\mathbf{a}_y$ 的均匀电流面相平行。试给出作用在该环上微小长度上的力，然后积分，说明总力是零。

答案：$d\mathbf{F}=\frac{1}{2}Ia\mu_0K_0\cos\varphi\, d\varphi(-\mathbf{a}_z)$

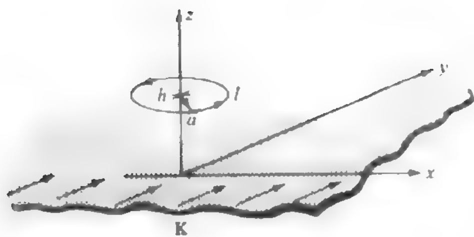


图 10-19

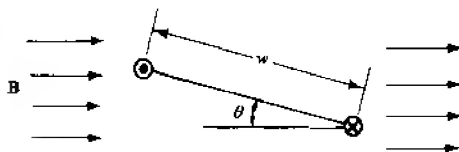


图 10-20

10.25 如图 10-20 所示，长为 l 的两个导体与 B 垂直，它们之间的间距为 w。试说明关于平行于导体的任何轴的转矩是 $BIlw\cos\theta$。

10.26 通有电流 I、方向为 $\mathbf{a}_\varphi$、半径为 r 的圆形电流环位于平面 $z=0$ 内。如果有一均匀场$\mathbf{B}=B_0(\mathbf{a}_x+\mathbf{a}_z)/\sqrt{2}$，求场对电流环产生的力矩。

答案：$(\pi r^2B_0I/\sqrt{2})\mathbf{a}_y$

10.27 在平面 $x=0$ 内，半径为 $r=0.35$m的电流环以 x 轴为中心，且在点(0,0,0.35)m 处有一沿 $-\mathbf{a}_y$ 方向、大小为 5.0A 的电流。如果均匀场 $\mathbf{B}=88.4(\mathbf{a}_x+\mathbf{a}_z)\mu$T，求转矩。

答案：$1.70\times10^{-4}(-\mathbf{a}_y)$N·m

10.28 在平面 $z=0$ 内，有一边长为 0.60m 的正方形导电回路，它以原点为中心，边分别与 x 轴和 y 轴平行，在导电回路内通以 $\mathbf{a}_\varphi$方向的电流 2.5A。如果 $\mathbf{B}=15\mathbf{a}_y$ mT，求场对导电回路的力和转矩。如果导电回路在平面 $z=0$ 内转动 45°，转矩有变化吗？

答案：$1.35\times10^{-2}(-\mathbf{a}_x)$N·m；$\mathbf{T}=\mathbf{m}\times\mathbf{B}$

10.29 一个 200 匝、0.30m×0.15m 的矩形线圈放置于 $B=0.2$T 的均匀场中。求磁矩 m 和最大转矩。

答案：45.0A·m²，9.0N·m

10.30 如图 10-21 所示，两个长为 4.0m 的导体放置于以 z 轴为中心、半径为 2.0m 的圆柱壳上，导体中通有 10.0A 的电流，方向如图所示。在 $\varphi=0$ 处外场为 $\mathbf{B}=0.5\mathbf{a}_x$T；在 $\varphi=\pi$ 处外场为 $\mathbf{B}=-0.5\mathbf{a}_x$ T。求合力和关于轴的力矩。

答案：$-40\ \mathbf{a}_y$ N，0

10.31 在一个直圆柱面上含有 550 个导体，每一个导体都通有 7.5A 的恒定电流。磁场$\mathbf{B}=38\sin\varphi\ \mathbf{a}_r$(mT)。当$0<\varphi<\pi$ 时电流沿 $\mathbf{a}_z$ 方向，当 $\pi<\varphi<2\pi$ 时电流沿 $-\mathbf{a}_z$ 方向，见图 10-22。如果圆柱沿 $-\mathbf{a}_\varphi$方向以 1600 r/min 的转速转动，求需要的机械功率。

答案：60.2W

10.32 一个含有 n 个导体的圆柱装置以每分 N 转的转速切割磁场转动（见图 10-22），如果 $\mathbf{B}=B_0\sin2\varphi\ \mathbf{a}_r$，且电流在 B 改变符号的每个象限内改变方向，求所需功率的表达式。

答案：$\frac{B_0nIlrN}{60}$ (W)

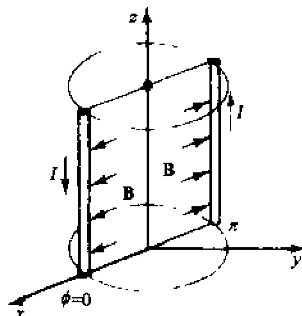


图 10-21

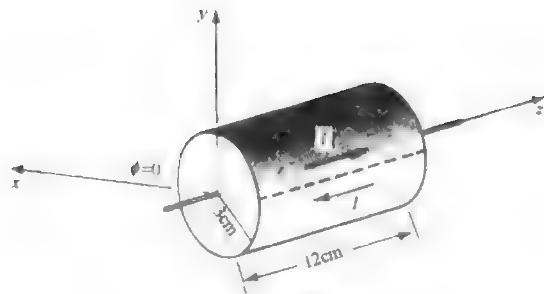


图 10-22

10.33　如图 10-23 所示，位于 x 轴上、长为 l 的导体中通以 $\mathbf{a}_x$ 方向的电流 I。如果均匀场 $\mathbf{B}=B_0\mathbf{a}_z$，求导体以恒速转动需要做的功。

答案：$\pi B_0 l^2 I/4$

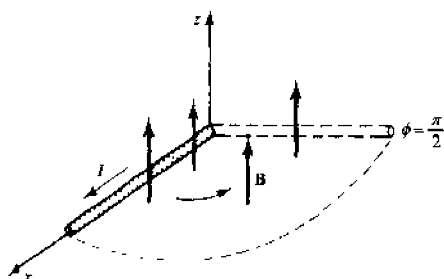


图 10-23

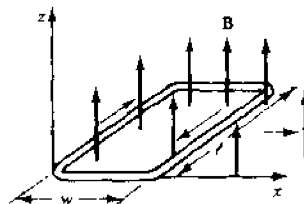


图 10-24

10.34　如图 10-24 所示，在均匀场 $\mathbf{B}=B_0\mathbf{a}_z$ 中有一个沿 y 轴、长为 l 的矩形电流回路。试说明电流回路以恒速沿 x 轴移动所做的功为零。

10.35　对于如图 10-24 所示结构，磁场是

$$\mathbf{B} = B_0\left(\sin\frac{\pi x}{w}\right)\mathbf{a}_z$$

求从图示位置开始，以恒速沿 x 轴移动线圈的距离为 w 时所做的功。

答案：$-4B_0 Ilw/\pi$

10.36　在沿 y 轴放置、长为 0.25m 的导体中通以 $\mathbf{a}_y$ 方向的电流 25.0 A。如果均匀场 $\mathbf{B}=0.06\mathbf{a}_z$T，求在 3.0s 内以恒速将导体平移到 $x=5.0$m 处需要的功率。

答案：-0.625W

10.37　如果圆周路径的直径为 1cm，求在场 $B=30\mu$T 中质子的切向速度。

答案：14.4m/s

10.38　一个 α 粒子和一个质子($Q_\alpha=2Q_p$)以初速度 $U_0=8.5$m/s 进入磁场 $B=1\mu T$ 中。已知 α 粒子和质子的质量分别为 6.68×10^{-27}kg 和 1.673×10^{-27}kg，求它们的圆周路径的半径。

答案：177mm，88.8mm

10.39　如果一个质子用 2.35μs 在磁场中完成一个圆形轨道，$\mathbf{B}$ 的大小是多少？

答案：2.79×10^{-2}T

10.40　在场 $B=4.0\times10^{-2}$T 中，一个电子沿半径为 0.35×10^{-10}m 的圆周路径运动，最大转矩为 7.85×10^{-26} N·m，试确定角速度。

答案：2.0×10^{16} rad/s

10.41　在一个区域内含有同一方向的均匀场 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{E}$，且 $B=650\ \mu$T。一个电子沿螺旋路径运动，圆半径为 35mm。如果电子在轴向上的初速度为零，当它走完一个圆周时，沿轴向前进 431mm，求 $\mathbf{E}$ 的大小。

答案：1.62 kV/m

第 11 章 电感和磁路

11.1 电感

一个导体系统的**电感** L 定义为**耦合磁通量与产生磁通的电流的比**。如图 11-1 所示，对于静态(或低频)电流 I 和一个 N 匝密绕线圈组成的系统，其电感为

$$L = \frac{N\Phi}{I}$$

L 的单位是 H(亨利)，其中 1H = 1Wb/A。电感也可由式 $L=\lambda/I$ 求出，其中 λ 为**磁链**。对于 N 匝密绕线圈，λ 等于 $N\Phi$；对于其他的导体分布形式，λ 等于 Φ。

应该指出，L 是介质的磁导率 μ(μ 的单位是 H/m)与有长度单位的几何因子的乘积。它可与电阻 R(第 6 章)和电容 C(第 7 章)的表达式相类比。

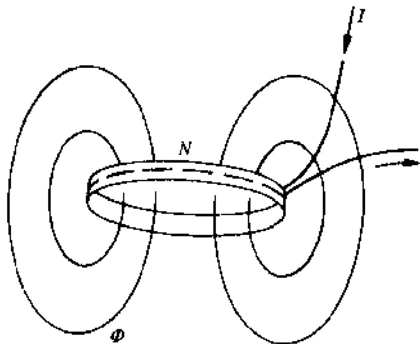


图 11-1

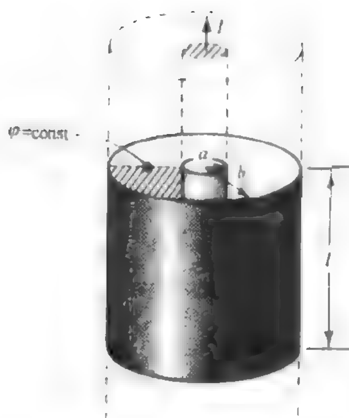


图 11-2

例 1 如图 11-2 所示，求同轴圆柱导体单位长度的电感。

解 在两个导体之间，有

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r}\mathbf{a}_\varphi, \qquad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\mathbf{a}_\varphi$$

通过平面 φ = const. 的磁通与两导体中的电流相耦合。设导体的长度为 l，则

$$\lambda = \int_0^l\int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r}drdz = \frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a} \quad (\text{H/m})$$

例 2 已知理想螺线管的长度为 $l=0.50$m，匝数为 300，圆形截面的半径为 0.02m，求理想螺线管的电感。

解 理想螺线管单位长度的匝数为 $n=300/0.50=600$，则轴向磁场为

$$B = \mu_0 H = \mu_0 600I \quad (\text{Wb/m}^2)$$

进一步，有

$$\frac{L}{l} = \frac{N\Phi}{I} = N\left(\frac{B}{I}\right)A = 300(600\mu_0)\pi(4\times10^{-4})$$
$$= 568\ \mu\text{H/m}$$

或者 $L = 284\ \mu$H。

在 5.8 节中，设想从无限远处引入一个点电荷导出了电场的能量公式

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{体积}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}dv$$

在磁场中没有与点电荷相似的磁荷，因此不能用同样的方法导出磁场能量公式。然而，用其他方法可导出完全类似的表达式

$$W_H = \frac{1}{2}\int_{\text{体积}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dv$$

该表达式与电路分析中导出的公式 $W_H = \frac{1}{2}LI^2$ 相比较，可得出

$$L = \int_{\text{体积}} \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{I^2} dv$$

例3 利用上式验证例1的结果，可得

$$L = \int_{\text{体积}} \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{I^2} dv = \frac{\mu_0}{I^2}\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_a^b \left(\frac{I^2}{4\pi^2 r^2}\right) r dr d\varphi dz = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

11.2 规则导体结构的电感

图11-3~图11-7给出了一些常见的非同轴对称导体之间电感的准确表达式或近似表达式[①]。

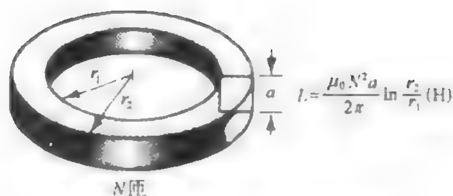


图11-3 矩形截面的螺绕环线圈[①]

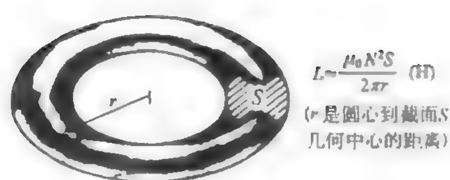


图11-4 一般截面S的螺绕环线圈



图11-5 半径为a的平行长直导体

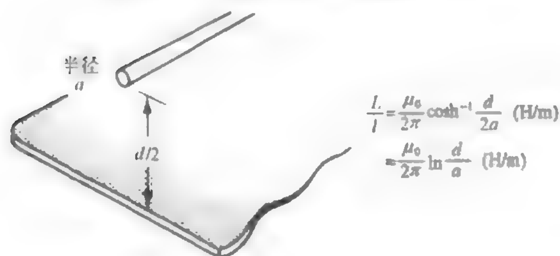
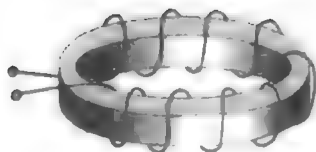


图11-6 地面上方的平行圆柱导体

11.3 法拉第定律和自感

考虑以闭合回路 C 为边界的非闭合曲面 S。如果与曲面 S 耦合的磁通 φ 是随时间变化的，那么沿边界 C 将存在**电压**[②] v；由**法拉第定律**，可知

① 螺绕环线圈的绕法见下图。——译者注



② 此处"电压"的含义是指闭合回路中的感应电动势。——译者注

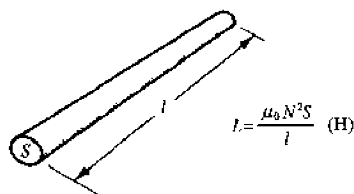


图 11-7　小截面 S 的长螺线管线圈

$$v = -\frac{d\varphi}{dt}$$

正如在第 5 章中所述,静电位或静电压 v 是在空间中定义的,并且与保守电场相联系。与此相反,由法拉第定律定义的**感应电压** v 是位置的多值函数,它是与非保守场(**电动势**)相联系的。这将在第 12 章中详细阐述。

因为导线回路中的电流是变化的,所以通过该回路的磁通也是变化的。对于这种情况法拉第定律同样成立:

$$v = -\frac{d\varphi}{di}\frac{di}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

在电路理论中,L 是回路的**自感**,v 是自感应电压或电感器上的反电压。

11.4　内电感

磁通不仅在导体外产生,而且在导体截面内也产生,这种内磁通产生**内电感**。内电感与外电感相比一般很小,通常忽略不计。图 11-8(a)表示一个圆形截面的导体,假设在导体截面上电流 I 是均匀分布的(此假设仅对于低频电流成立,因为对于高频电流,受趋肤效应的影响,电流主要分布在导体的表层)。在半径为 a 的导体内,由安培定律可得

$$\mathbf{H} = \frac{Ir}{2\pi a^2}\,\mathbf{a}_\varphi \quad 和 \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2}\,\mathbf{a}_\varphi$$

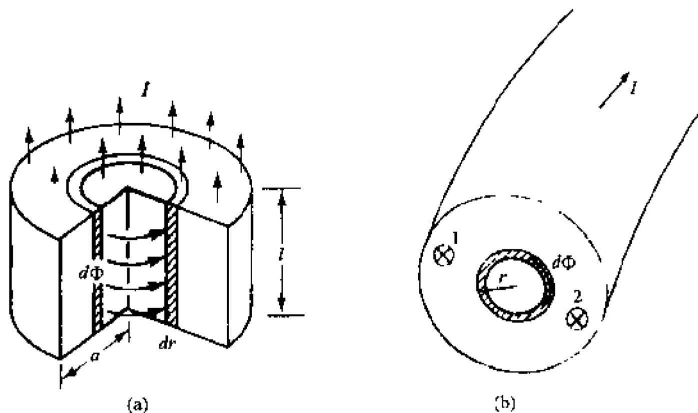


图 11-8

图 11-8(a)所表示的一段直导线可以想象为是图 11-8(b)中半径为无限大的圆环线圈的一小部分。电流细导线成为半径为无限大的圆环。通过带状面积 ldr 的磁通线 $d\Phi$ 仅包围了半径小于 r 的细导线部分。$d\Phi$ 仅与总电流的 $\pi r^2/\pi a^2$ 部分相耦合,所以通过加权求和可求出总磁通链为

$$\lambda = \int\left(\frac{\pi r^2}{\pi a^2}\right)d\Phi = \int_0^a\left(\frac{\pi r^2}{\pi a^2}\right)\frac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2}ldr = \frac{\mu_0 Il}{8\pi}$$

进一步,有

$$\frac{L}{l} = \frac{\lambda/I}{l} = \frac{\mu_0}{8\pi} = \frac{1}{2}\times 10^{-7}\ \mathrm{H/m}$$

这一结果与导体的半径无关。总电感是外电感和内电感之和。如果外电感的数量级为 $\frac{1}{2}\times 10^{-7}$H/m,则内电感不能忽略。

11.5　互感

在图 11-9 中,线圈 1 中的电流 i_1 产生的磁通与 N_2 匝的线圈 2 相交链的部分为 φ_{12}。在线圈 2 中的**互感**电压为

$$v_2 = N_2 \frac{d\varphi_{12}}{dt} \qquad \text{(省略了负号)}$$

就**互感** $M_{12} \equiv N_2 \varphi_{12}/I_1$ 而言，有

$$v_2 = N_2 \frac{d\varphi_{12}}{di_1}\frac{di_1}{dt} = M_{12}\frac{di_1}{dt}$$

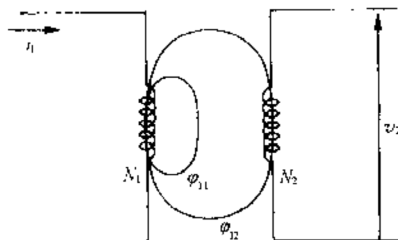


图 11-9

与电感 L 一样，互感是线圈区域内的磁导率 μ 与具有长度单位的几何因子的乘积。如果线圈1与线圈2的作用对调，则有

$$v_1 = M_{21}\frac{di_2}{dt}$$

综上可以得出以下互易关系：$M_{12} = M_{21}$。

例4 一个参数为 $N_1 = 1000$、$r_1 = 1.0\text{cm}$、$l_1 = 50\text{cm}$ 的螺线管线圈与另一个参数为 $N_2 = 2000$、$r_2 = 2.0\text{cm}$、$l_2 = 50\text{cm}$ 的螺线管线圈共轴同心。在真空条件下，求互感。

解 对于截面很小的长螺线管线圈，可以认为 H 在线圈内部为常数，在线圈外部为零。对于通有电流 I_1 的第一个螺线管线圈，有

$$H = \left(\frac{1000}{0.50}\right) I_1 \quad (\text{A/m}) \quad \text{(在轴向方向)}$$

$$B = \mu_0 2000 I_1 \qquad (\text{Wb/m}^2)$$

$$\Phi = BA = (\mu_0 2000 I_1)(\pi \times 10^{-4}) \quad (\text{Wb})$$

因为在线圈外部，H 和 B 都为零，所以 Φ 就是与第二个线圈耦合的磁链。这样

$$M_{12} = N_2\left(\frac{\Phi}{I_1}\right) = (2000)(4\pi \times 10^{-7})(2000)(\pi \times 10^{-4}) = 1.58\ \text{mH}$$

11.6 磁路

在第9章中分别研究了磁场强度 **H**、磁通 Φ 和磁通密度 **B**，并且解决了在真空中的各种问题。例如，如图11-10所示，当安培定律应用于穿过长空心线圈的闭合回路 C 时，结果为

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI$$

在线圈外部，磁力线是分散分布的，所以 **B** 很小，磁通被有效地束缚在线圈内，从而有

$$H \approx \frac{NI}{l}$$

铁磁性材料的相对磁导率 μ_r 为几千数量级，因此，对于给定的 H，磁通密度 $B = \mu_0\mu_r H$ 将远远大于在真空中的值。在图11-11中，线圈没有绕在整个铁芯上。尽管如此，线圈的 NI 产生的磁通 Φ 将会沿着铁芯流动。可以这么说，在铁芯中的磁通量是周围空间中的磁通量的几千倍。这与第9章所述的真空中的电磁学相差如此之大，以至于形成了一个完整的学科领域，即**铁芯磁学**(iron-core magnetics)或**磁路**。在该学科的上述简短介绍中，假设了所有磁通都在铁芯内，而且铁芯横截面上的磁通均匀分布，计算 NI 降时，铁芯的长度取平均长度。

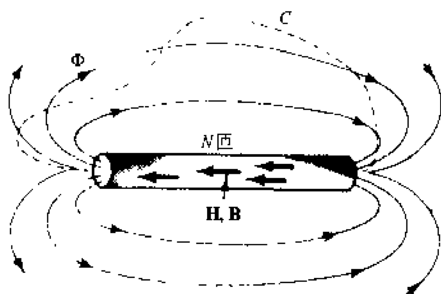


图 11-10

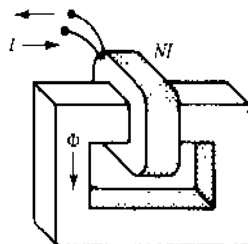


图 11-11

11.7　*B-H* 曲线

通过不断增加 H，测量相应磁通密度 B，可以测试铁磁性材料的 B-H 曲线。在图 11-12 和图 11-13 中给出了一些常见铁磁性材料的**磁化曲线**或简称 **B-H 曲线**。通过式 $\mu_r = B/\mu_0 H$，可由 B-H 曲线计算出相对磁导率。图 11-14 表明硅钢的 μ_r-H 曲线的非线性程度很高，这种非线性要求利用图解的方法求解问题。

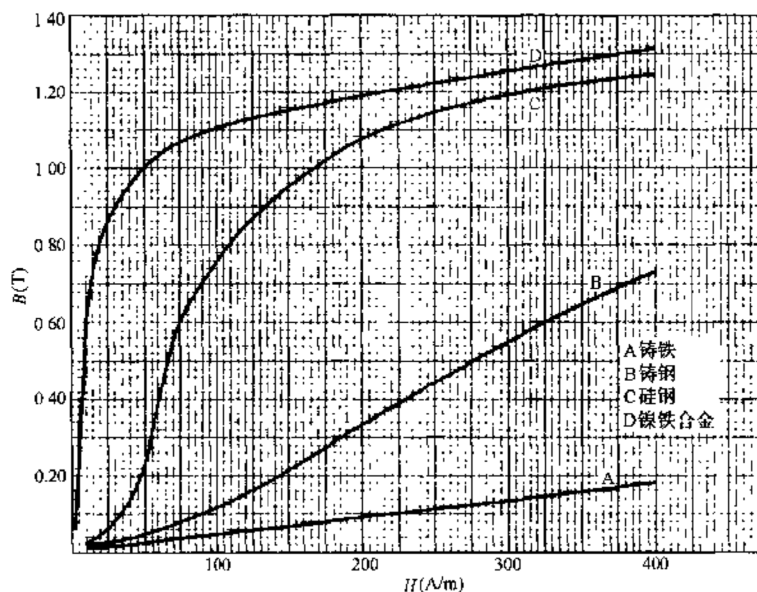


图 11-12

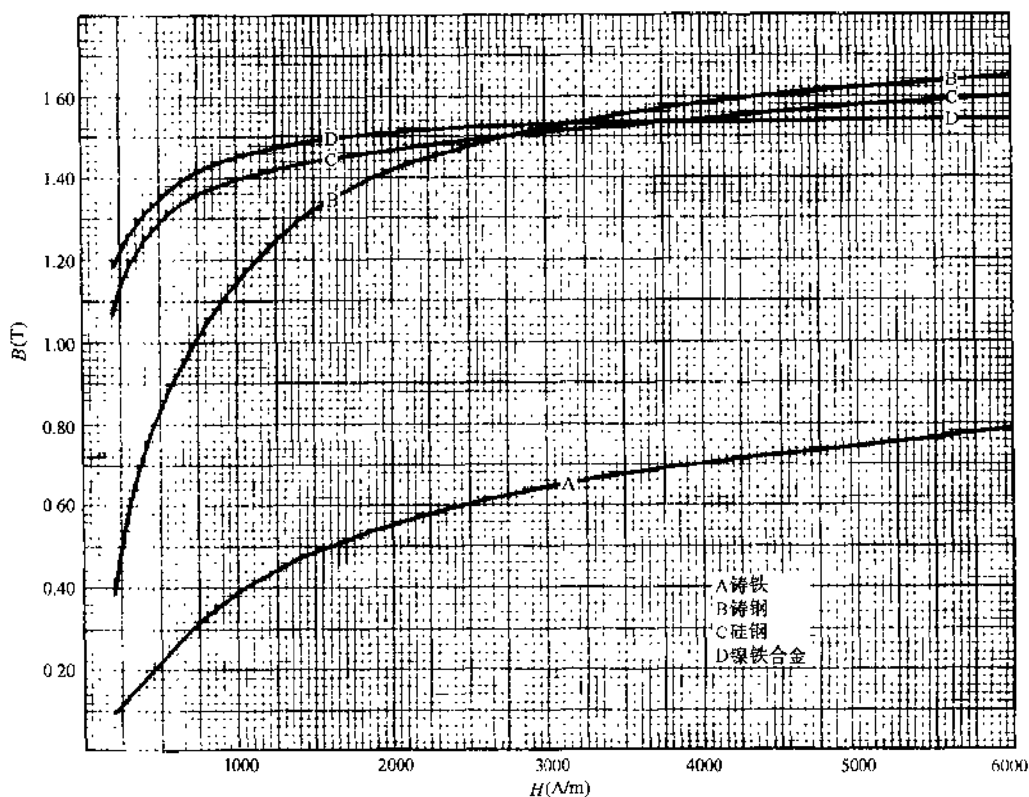


图 11-13

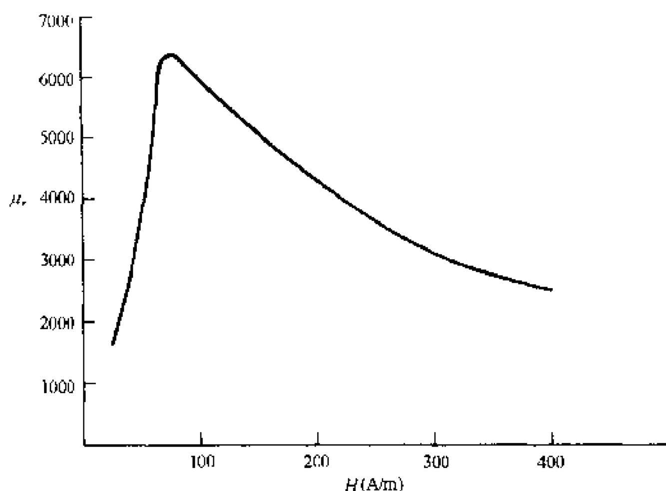


图 11-14

11.8　磁路安培定律

一个绕在铁芯上电流为 I 的 N 匝线圈产生的**磁通势**(mmf)为 NI。常用符号 F 代表磁通势,单位名称为安培或**安培匝**。如图 11-15(a)所示,沿铁芯的中心路径应用安培定律,可得

$$F = NI = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$
$$= \int_1 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_2 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_3 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$
$$= H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3$$

上式与三个电阻和一个电势 V 构成的串联电路的基尔霍夫定律相似:

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

与电压升 V 和电压降 V_1、V_2 和 V_3 相类比,F 可看作是 NI **升**,Hl 项可看作是 NI **降**。在图 11-15(b)和(c)中给出了类比结果。在图 11-5(b)中的磁通 Φ 可与电流 I 相类比,**磁阻** $\mathscr{R}$ 可与电阻 R 相类比。从而可导出以下磁阻的表达式:

$$NI\ 降 = Hl = BA\left(\frac{l}{\mu A}\right) = \Phi\mathscr{R}$$

所以

$$\mathscr{R} = \frac{l}{\mu A}\ (\mathrm{H}^{-1})$$

若已知磁阻,则可写出图 11-15(b)的磁路方程式

$$F = NI = \Phi(\mathscr{R}_1 + \mathscr{R}_2 + \mathscr{R}_3)$$

在计算材料的磁阻之前必须知道它的相对磁导率 μ_r,而只有已知 B 和 H 之后,才能计算 μ_r 的值。磁阻表达式可与关系式 $R = \dfrac{l}{\sigma A}$ (6.7 节)相类比,在该式中电导率 σ 与电流无关。

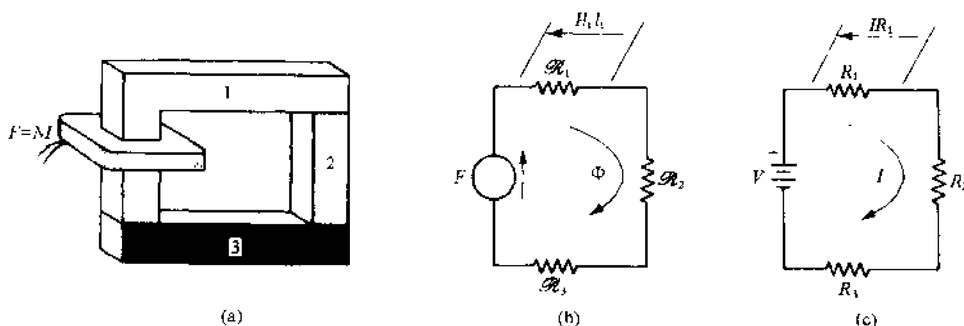


图 11-15

11.9　带有气隙的铁芯

带有小气隙的磁路是很常见的。因为在气隙中 NI 降远比在铁芯内的大，所以气隙应尽可能小。由于磁通在气隙处向四周发散，所以气隙处的面积大于相邻铁芯的面积。如果气隙长度 l_a 小于铁芯的最小尺寸的 $\frac{1}{10}$，则气隙的**有效面积** S_a 可以计算出来。对于一个尺寸为 a 和 b 的矩形铁芯，有效面积为

$$S_a = (a + l_a)(b + l_a)$$

如果已知气隙内的总磁通，那么可以直接计算出 H_a 和 $H_a l_a$：

$$H_a = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\Phi}{S_a}\right) \qquad H_a l_a = \frac{l_a \Phi}{\mu_0 S_a}$$

当均匀铁芯的长度为 l_i，且铁芯上有气隙时，安培定律可写为

$$NI = H_i l_i + H_a l_a = H_i l_i + \frac{l_a \Phi}{\mu_0 S_a}$$

若已知磁通 Φ，则不难计算出气隙内的 NI 降，从而求出 B_i，由相应的 B-H 曲线得到 H_i，进而计算出铁芯中的 NI 降 $H_i l_i$，求和后可得出对应于磁通 Φ 的 NI。另一方面，当已知 NI 时，求解 B_i 和 Φ 需要反复迭代，这将在习题中看到。当然也可以用作图的方法求解。

11.10　多个线圈

可以在铁芯上绕制两个或多个线圈以使它们的磁通势增加或者减小。因此，在图 11-16 中给出了表示极性的方法。与包含有两个或多个电压源的直流电路中所假设的电流的方向一样，所求磁通 Φ 的假设方向可能不符合实际情况。若得出负值，仅表示磁通的方向与假设方向相反。

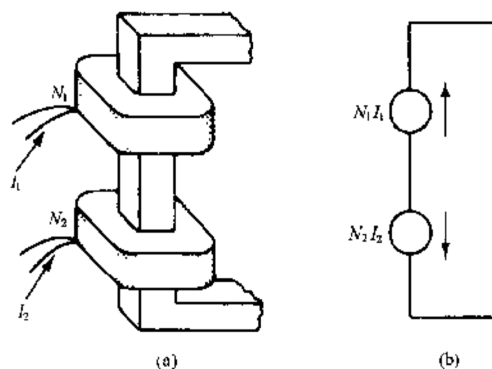


图 11-16

11.11　并联磁路

可用图 11-17(b)所示的两个等效回路来求解并联磁路。在左边支路中有一个 NI 升和一个 NI 降。在节点 a 和 b 之间的 NI 降可写成每个支路的磁压降，即

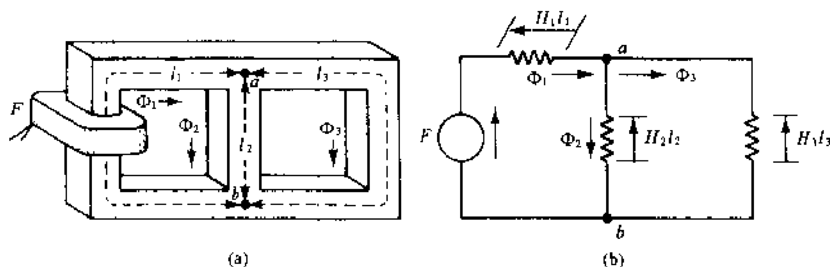


图 11-17

$$F = H_1 l_1 = H_2 l_2 = H_3 l_3$$

磁通量满足

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$$

当铁芯由多种材料组成时，需要使用多种 B-H 曲线。当一个支路中有气隙时，在连接该支路的节点之间将会产生磁通势 $H_i l_i + H_a l_a$。

对于并联磁路问题，应画出等效磁路，并直接标明材料的类型、截面面积和平均长度，这将有利于问题的分析。对于比较复杂的问题，列出如表 11-1 所示的表格是很有帮助的，因为把已知数据直接填入表格内，则剩余量就可以计算出或由 B-H 曲线给出。

表 11-1

部分	材料	面积	l	Φ	B	H	Hl
1							
2							
3							

习 题 求 解

11.1 若 $a = 1\text{mm}$, $b = 3\text{mm}$，求图 11-2 所示的同轴电缆单位长度的电感。假设 $\mu_r = 1$ 且忽略内电感。

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{b}{a} = \frac{4\pi\times10^{-7}}{2\pi}\ln 3 = 0.22\ \mu\text{H/m}$$

11.2 如图 11-5 所示，若 $d = 25$ 英尺(ft)[①]，$a = 0.803$ 英寸(in)，求平行圆柱导体的单位长度的电感。

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{\pi}\cosh^{-1}\frac{d}{2a} = (4\times10^{-7})\cosh^{-1}\frac{25(12)}{2(0.803)} = 2.37\ \mu\text{H/m}$$

由近似公式，可得

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{a} = 2.37\ \mu\text{H/m}$$

当 $d/a \geqslant 10$ 时，使用近似公式产生的误差小于 0.5%。

11.3 习题 11.2 中半径相同的圆形导体与无限大导电面相距 12.5 英尺，求电感。

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{d}{a} = (2\times10^{-7})\ln\frac{25(12)}{0.803} = 1.18\ \mu\text{H/m}$$

所求电感是习题 11.2 中的电感的 $\frac{1}{2}$ 倍。因此，习题 11.2 可认为是在图 11-5 中两个导体中间插入了一个导电面，每个导体与导电平面之间的电感都是 1.18μH/m。由于它们是串联的，所以总电感为 2.37μH/m。

11.4 如图 11-4 所示，假设空心圆形截面的螺绕环线圈的截面半径为 4mm。若线圈的匝数为 2500 匝，平均半径为 $r = 20\text{mm}$，求空心螺绕环线圈的电感。

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{2\pi r} = \frac{(4\pi\times10^{-7})(2500)^2\pi(0.004)^2}{2\pi(0.020)} = 3.14\ \text{mH}$$

11.5 如图 11-3 所示，假设空心矩形截面的螺绕环线圈的匝数为 700，内半径为 1cm，外半径为 2cm，高为 1.5cm。(a)用空心矩形截面的螺绕环线圈的公式求电感；(b)假设在平均半径上 H 是均匀的，用一般截面的螺绕环线圈的公式求电感 L。

(a)
$$L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1} = \frac{(4\pi\times10^{-7})(700)^2(0.015)}{2\pi}\ln 2 = 1.02\ \text{mH}$$

---

① 1ft = 12in，即 1 英尺等于 12 英寸。——译者注

(b)
$$L=\frac{\mu_0 N^2 S}{2\pi r}=\frac{(4\pi\times10^{-7})(700)^2(0.01)(0.015)}{2\pi(0.015)}=0.98\ \mathrm{mH}$$

当螺绕环线圈的半径远大于横截面的尺寸时，用以上两个公式得出的结果相同，见习题11.26。

11.6 使用能量积分公式，求半径为 a 的圆柱导体单位长度的内电感。

解 在距导体轴线 $r\leqslant a$ 处，因

$$\mathbf{H}=\frac{Ir}{2\pi a^2}\mathbf{a}_\varphi,\qquad \mathbf{B}=\frac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2}\mathbf{a}_\varphi$$

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}=\frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 a^4}r^2$$

所以，长度为 l 的导体内储存的能量所对应的电感为

$$L=\int\frac{(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})dv}{I^2}=\frac{\mu_0}{4\pi^2 a^4}\int_0^a r^2 2\pi r l dr=\frac{\mu_0 l}{8\pi}$$

或者 $L/l=\mu_0/8\pi$。这与11.4节中的结果是一致的。

11.7 如图11-18所示，铸铁磁芯的内半径为7cm，外半径为9cm。若线圈的磁通势为500A，求磁通 Φ。



图 11-18

解
$$l=2\pi(0.08)=0.503\ \mathrm{m}$$

$$H=\frac{F}{l}=\frac{500}{0.503}=995\ \mathrm{A/m}$$

由图11-13中铸铁的 B-H 曲线，可得 $B=0.40$ T。从而

$$\Phi=BS=(0.40)(0.02)^2=0.16\ \mathrm{mWb}$$

11.8 如图11-19所示，磁路由C型铸钢1和铸铁2组成。若铸铁内的磁通密度 $B_2=0.45$T，求在150匝线圈内所需要的电流。

解 横截面面积 $S_1=4\times10^{-4}\ \mathrm{m}^2$，$S_2=3.6\times10^{-4}\ \mathrm{m}^2$，磁路的平均长度是

$$l_1=0.11+0.11+0.12=0.34\ \mathrm{m}$$

$$l_2=0.12+0.009+0.009=0.138\mathrm{m}$$

由图11-13中铸铁的 B-H 曲线，可得 $H_2=1270$ A/m。这样

$$\Phi=B_2S_2=(0.45)(3.6\times10^{-4})=1.62\times10^{-4}\ \mathrm{Wb}$$

$$B_1=\frac{\Phi}{S_1}=0.41\ \mathrm{T}$$

由图11-12中铸钢的 B-H 曲线，可得 $H_1=233$ A/m。

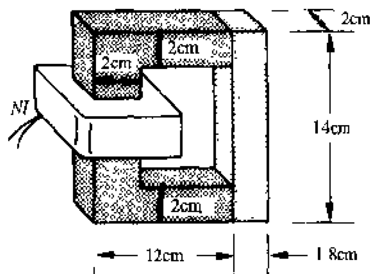


图 11-19

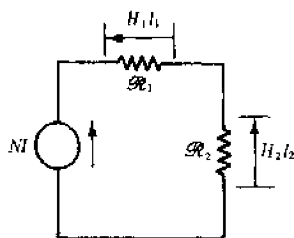


图 11-20

由图11-20中的等效磁路，可得方程：

$$F=NI=H_1l_1+H_2l_2$$

$$150I=233(0.34)+1270(0.138)$$

所以
$$I=1.70\ \mathrm{A}$$

11.9 如图11-21所示，磁路由 0.02×0.02m 的正方形截面、平均长度为 $l_1=0.44$m 的铸铁构成。气隙长度为 $l_a=2$mm，线圈的匝数为400。求在气隙内产生0.141mWb的磁通所需要的电流 I。

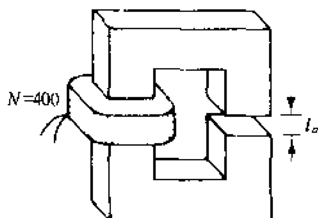


图 11-21

解 气隙内的磁通 Φ 也是铁芯内的磁通，所以

$$B_i = \frac{\Phi}{S_i} = \frac{0.141 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-4}} = 0.35\ \text{T}$$

由图 11-13，可得 $H_i = 850$ A/m，从而

$$H_i l_i = 850(0.44) = 374\ \text{A}$$

对于气隙，$S_a = (0.02+0.002)^2 = 4.84 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$ 和

$$H_a l_a = \frac{\Phi}{\mu_0 S_a} l_a = \frac{0.141 \times 10^{-3}}{(4\pi \times 10^{-7})(4.84 \times 10^{-4})}(2 \times 10^{-3}) = 464\ \text{A}$$

所以

$$F = H_i l_i + H_a l_a = 838\ \text{A}$$

$$I = \frac{F}{N} = \frac{838}{400} = 2.09\ \text{A}$$

11.10　在直流电机中，气隙的有效面积 $S_a = 4.26 \times 10^{-2}\text{m}^2$，气隙的长度 $l_a = 5.6$mm，求气隙的磁阻。



$$\mathcal{R} = \frac{l_a}{\mu_0 S_a} = \frac{5.6 \times 10^{-3}}{(4\pi \times 10^{-7})(4.26 \times 10^{-2})} = 1.05 \times 10^5\ \text{H}^{-1}$$

11.11　如图 11-22 所示，铸铁磁芯的截面积为 $S_i = 4\text{cm}^2$，平均长度为 0.483m；气隙长度为 2mm，有效面积为 $S_a = 4.84\text{cm}^2$。求气隙内的磁通 Φ。

　磁芯的长度远大于气隙的长度，且铸铁不是良导磁材料，所以，先初步取气隙内的磁压降为 600 安匝，即 $H_a l_a = 600$A。从而有

$$H_a l_a = \frac{\Phi}{\mu_0 S_a} l_a$$

$$\Phi = \frac{600(4\pi \times 10^{-7})(4.84 \times 10^{-4})}{2 \times 10^{-3}} = 1.82 \times 10^{-4}\ \text{Wb}$$

这样，$B_i = \Phi/S_i = 0.46$T，由图 11-13 可得 $H_i = 1340$A/m。此时，磁芯内的磁压降为

$$H_i l_i = 1340(0.438) = 587\ \text{A}$$

则

$$H_i l_i + H_a l_a = 1187\text{A}$$

两者之和大于线圈的磁通势 1000A。因此，B_i 的值应取小于 0.46T 的值，然后再次求解，直到 $H_i l_i$ 与 $H_a l_a$ 之和等于 1000A 为止。当 $B_i = 0.41$T 和 $\Phi = 1.64 \times 10^{-4}$Wb 时，所求结果最接近 1000A。

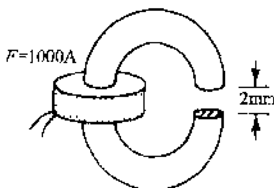


图 11-22

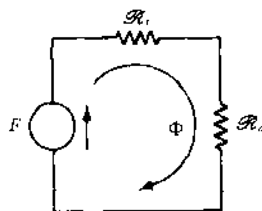


图 11-23

11.12　用磁阻和图 11-23 中的等效磁路求解习题 11.11。

　由习题 11.11 所求出的 B_i 和 H_i 的值可得出

$$\mu_0 \mu_r = \frac{B_i}{H_i} = 3.83 \times 10^{-4}\ \text{H/m}$$

对于磁芯，有

$$\mathcal{R}_i = \frac{l_i}{\mu_0 \mu_r S_i} = \frac{0.438}{(3.83 \times 10^{-4})(4 \times 10^{-4})} = 2.86 \times 10^6\ \text{H}^{-1}$$

对于气隙，有

$$\mathcal{R}_a = \frac{l_a}{\mu_0 S_a} = \frac{2 \times 10^{-3}}{(4\pi \times 10^{-7})(4.84 \times 10^{-4})} = 3.29 \times 10^6\ \text{H}^{-1}$$

由磁路方程 $F = \Phi(\mathcal{R}_i + \mathcal{R}_a)$，可得出

$$\Phi = \frac{1000}{2.86 \times 10^6 + 3.29 \times 10^6} = 1.63 \times 10^{-4}\text{Wb}$$

磁芯内相应的磁通密度为 0.41T，这与习题 11.11 的结果相同。气隙内的磁阻可由相关尺寸和 μ_0 计算出，而磁芯的磁阻却不能这样计算，因为磁芯的 μ_r 取决于 B_t 和 H_t 的值。

11.13 由 Φ-F 的关系，用图表法求解习题 11.11。

把 H_i 的值从 700A/m 到 1100A/m 分别列在表 11-2 中的第一栏内；由图 11-13 中铸铁的 B-H 线可查出相对应的 B_t 值。Φ 和 H_il_i 的值可由计算得出，H_al_a 由 $\Phi l_a/\mu_0S_a$ 求出，进一步计算 H_il_i 与 H_al_a 之和可得出 F。因为气隙是线性的，所以作曲线图时只需确定两个点，由图 11-24 可求出当 $F=1000$A 时所对应的磁通 Φ 近似为 1.65×10^{-4}Wb。

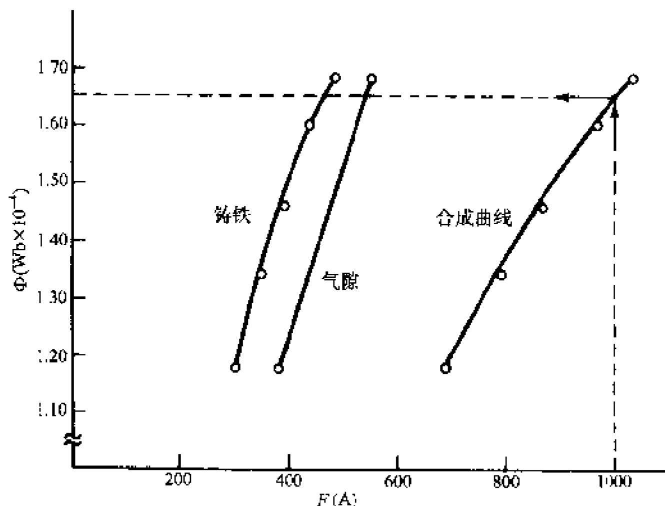


图 11-24

这种方法就是简单地把由习题 11.11 使用的试算方法得出的数据列成表格，这对于计算几个不同的线圈或线圈的电流是很有帮助的。

表 11-2

H_i(A/m)	B_i(T)	Φ(Wb)	H_il_i(A)	H_al_a(A)	F(A)
700	0.295	1.18×10^{-4}	307	388	695
800	0.335	1.34×10^{-4}	350	441	791
900	0.365	1.46×10^{-4}	395	480	874
1000	0.400	1.60×10^{-4}	438	526	964
1100	0.420	1.68×10^{-4}	482	552	1034

11.14 利用作图法和**负气隙线**(negative air-gap line)①，求线圈的磁通势为 800A 和 1200A 时习题 11.11 中磁芯内的磁通 Φ。

在习题 11.13 中已求出了铸铁磁芯的 H_il_i 对应的 Φ 值，图 11-25 中绘出了它们之间的关系曲线。气隙内 Φ-F 的关系是线性的。当线圈的磁通势为 800A 时，负气隙线的一个端点在 $\Phi=0$、$F=800$A 处。假设另一个端点为 $H_al_a=800$A，从而可导出

$$\Phi=\frac{\mu_0S_a(H_al_a)}{l_a}=2.43\times10^{-4}\ \text{Wb}$$

则可以确定该端点位于 $\Phi=2.43\times10^{-4}$ Wb、$F=0$ 处。

由铸铁磁芯的 Φ-F 非线性曲线与 $F=800$A 时的负气隙线的交点可以得出 $\Phi=1.34\times10^{-4}$ Wb。其他磁通势对应的负气隙线有相同的负斜率。当线圈的磁通势为 1000A 时，$\Phi=1.63\times10^{-4}$ Wb；当磁通势为 1200A 时，$\Phi=1.85\times10^{-4}$ Wb。

①由磁路方程 $F=H_il_i+\frac{l_a}{\mu_0S_a}$，可导出负气隙线的方程为 $\varphi=\frac{\mu_0S_a}{l_a}(F-H_il_i)$，曲线的横坐标是 H_il_i，纵坐标是 φ。——译者注

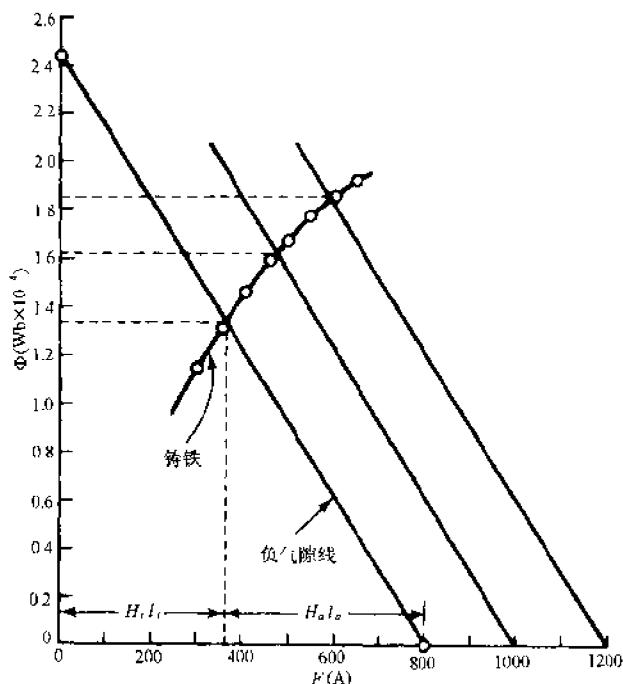


图11-25

11.15 对于磁通势为1000A的线圈,用铸铁的 B-H 曲线求解习题11.11。

解 用本题方法可以避免画出如习题11.13和习题11.14中的Φ-F 曲线。为了在铁芯的 B-H 曲线上画出负气隙线①,必须对不同的面积和长度作适当的调整。在表11-3中给出了必要的计算。

$$\frac{F}{l_i}=\frac{1000}{0.438}=2283\ \text{A/m}$$

表11-3

B_a(T)	H_a(A/m)	$B_a\left(\frac{S_a}{S_i}\right)$(T)	$H_a\left(\frac{l_a}{l_i}\right)$(A/m)	$\frac{F}{l_i}-H_a\left(\frac{l_a}{l_i}\right)$(A/m)
0.10	0.80×10^5	0.12	363	1920
0.30	2.39×10^5	0.36	1091	1192
0.50	3.98×10^5	0.61	1817	466

如图11-26所示,表11-3中第三列和第五列内的数据可以直接标在铸铁 B-H 曲线图中。因气隙是线性的,所以只需要确定两个点即可。从图中可知 $B_i=0.41$T。这种方法也可以应用于两个非线性磁芯部分的情况(见习题11.16)。

11.16 如图11-27所示,磁路由两部分构成,部分1是镍铁合金,$l_1=10$cm, $S_1=2.25\text{cm}^2$;部分2是铸钢,$l_2=8$cm, $S_2=3\text{cm}^2$。求磁通密度 B_1 和 B_2。

解 对铸钢部分的数据进行转换,并在镍铁合金部分($F/l_1=400$A/m)的 B-H 曲线图上标出相应的数据。表11-4给出了必要的计算。

---

① 由磁路方程可知

$$F=H_il_i+H_al_a=H_il_i+\frac{B_a}{\mu_0}l_a,\quad \varphi=B_aS_a=\mu_0S_a\left(\frac{l_i}{l_a}\right)\left(\frac{F}{l_i}-H_i\right)$$

所以由 $B_i=\frac{\varphi}{S_i}$ 可得到以 H_i 为横坐标、以 B_i 为纵坐标的负气隙线方程 $B_i=\mu_0\left(\frac{S_a}{S_i}\right)\left(\frac{l_i}{l_a}\right)\left(\frac{F}{l_i}-H_i\right)$。

——译者注

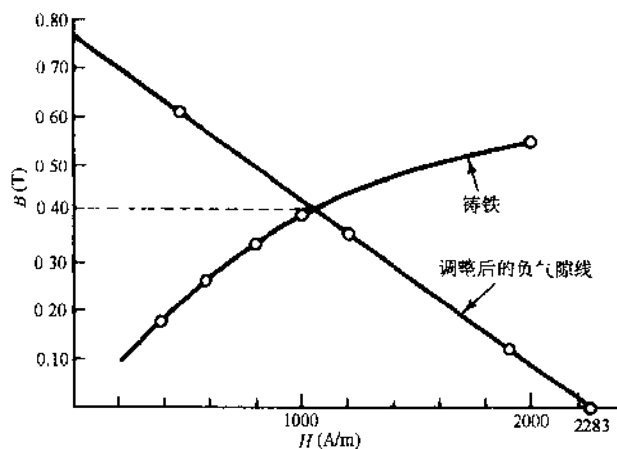


图 11-26

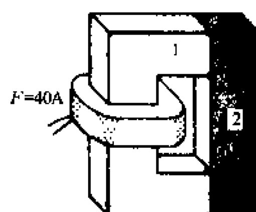


图 11-27

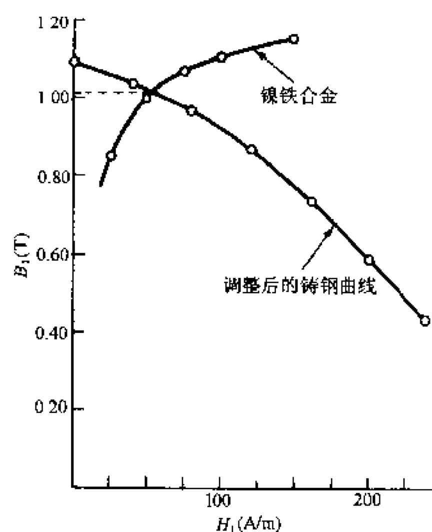


图 11-28

通过作图 11-28，可得 $B_1 = 1.01$ T。因 $B_1 S_1 = B_2 S_2$，所以

$$B_2 = 1.01\left(\frac{2.25 \times 10^{-4}}{3 \times 10^{-4}}\right) = 0.76 \text{ T}$$

再从相应的 B-H 曲线中求出对应的H_1 和 H_2，代入 $F = H_1 l_1 + H_2 l_2$，就可以验证以上结果。

表 11-4

B_2(T)	H_2(A/m)	$B_2\left(\frac{S_2}{S_1}\right)$(T)	$H_2\left(\frac{l_2}{l_1}\right)$(A/m)	$\frac{F}{l_1} - H_a\left(\frac{l_2}{l_1}\right)$(A/m)
0.33	200	0.44	160	240
0.44	250	0.59	200	200
0.55	300	0.73	240	160
0.65	350	0.87	280	120
0.73	400	0.97	320	80
0.78	450	1.04	360	40
0.83	500	1.11	400	0

11.17　如图 11-29(a)所示，由铸钢构成的并联磁路中有一个匝数为 500 的线圈。磁路的平均长度为 $l_2 = l_3 = 10$cm, $l_1 = 4$cm。若 $\Phi_3 = 0.173$ mWb，求线圈中的电流。



$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$$

因为中间支路的截面面积是两侧支路截面面积的两倍，所以在整个磁芯中磁通密度是相同的，即有

$$B_1 = B_2 = B_3 = \frac{0.173 \times 10^{-3}}{1.5 \times 10^{-4}} = 1.15\ \text{T}$$

对应于 $B_1 = 1.15$T，由图 11-13 可得 $H = 1030$A/m。由节点 a、b 之间的 NI 降，可写出下列方程(见图 11-29(b))：

$$F = Hl_1 = Hl_2 = Hl_3 \quad 或 \quad F = H(l_1 + l_2) = 1030(0.14) = 144.2\ \text{A}$$

从而

$$I = \frac{F}{N} = \frac{144.2}{500} = 0.29\ \text{A}$$

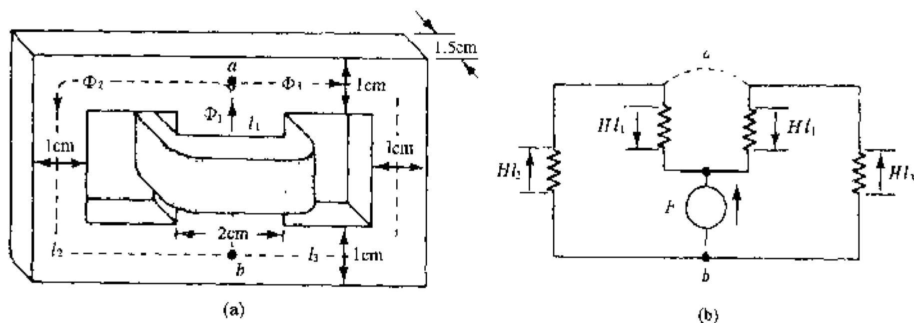


图 11-29

11.18　铸钢磁芯与习题 11.17 中的相同，在两侧支路上各有一个 500 匝的线圈，绕向如图 11-30(a)所示。若 $\Phi_3 = 0.173$ mWb，求线圈中的电流。



因为在磁芯内磁通密度是相同的，所以 H 也是相同的。对于每个磁极，可由如图 11-30(b)所示的等效磁路来求解磁路问题，所以

$$B = \frac{\Phi_3}{S_3} = 1.15\text{T}, \qquad H = 1030\text{A/m} \qquad (由图 11\text{-}13 查出)$$

$$F_3 = H(l_1 + l_3) = 1030(0.14) = 144.2\text{A}$$

因此

$$I = 0.29\text{A}$$

即每个线圈中的电流为 0.29A。

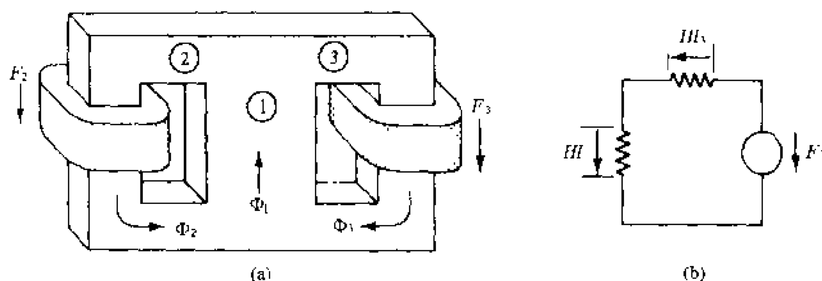


图 11-30

11.19　如图 11-31(a)所示，由硅钢组成的并联磁路中，各支路的截面面积都为 $S = 1.30\text{cm}^2$。平均长度分别为 $l_1 = l_3 = 25$cm, $l_2 = 5$cm。线圈的匝数都是 50 匝。已知 $\Phi_1 = 90\ \mu$Wb, $\Phi_3 = 120\ \mu$Wb，求线圈中的电流。



$$\Phi_2 = \Phi_3 - \Phi_1 = 0.30 \times 10^{-4}\ \text{Wb}$$

$$B_1 = \frac{90 \times 10^{-6}}{1.30 \times 10^{-4}} = 0.69\ \text{T}$$

由图 11-12 可得 $H_1 = 87\text{A/m}$，进而 $H_1 l_1 = 21.8\text{A}$。同理可得 $B_2 = 0.23\text{T}$，$H_1 = 87\text{A/m}$，$H_2 l_2 = 2.5\text{A}$；$B_3 = 0.92\text{T}$，$H_3 = 140\text{A/m}$，$H_3 l_3 = 35.0\text{A}$。图 11-31(b)的等效磁路表明节点 a、b 之间 NI 降的方程为

$$H_1 l_1 - F_1 = H_2 l_2 = F_3 - H_3 l_3$$

$$21.8 - F_1 = 2.5 = F_3 - 35.0$$

由此可得 $F_1 = 19.3\text{A}$，$F_3 = 37.5\text{A}$，从而线圈中的电流为 $I_1 = 0.39\text{A}$，$I_3 = 0.75\text{A}$。

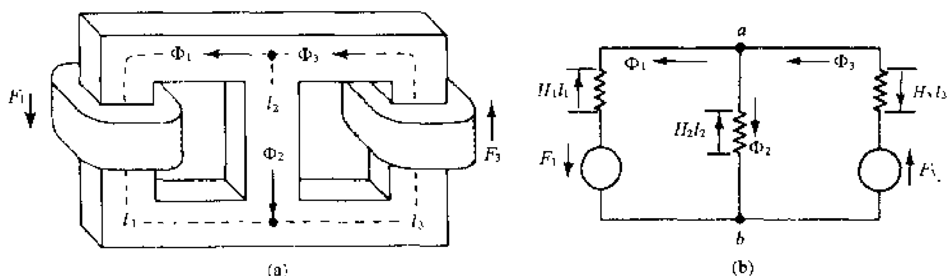


图 11-31

11.20 用三个支路的磁阻作出习题 11.19 的等效磁路，并且用 $F_1 = 19.3\text{A}$ 和 $F_3 = 37.5\text{A}$ 计算磁芯内的磁通。

解

$$\mathscr{R} = \frac{l}{\mu_0 \mu_r S}$$

由习题 11.19 中得出的 B 和 H 的值可知

$$\mu_0 \mu_{r1} = 7.93 \times 10^{-3}\ \text{H/m}$$

$$\mu_0 \mu_{r2} = 4.69 \times 10^{-3}\ \text{H/m}$$

$$\mu_0 \mu_{r3} = 6.57 \times 10^{-3}\ \text{H/m}$$

从而可计算出磁阻为

$$\mathscr{R}_1 = \frac{l_1}{\mu_0 \mu_{r1} S_1} = 2.43 \times 10^5\ \text{H}^{-1}$$

$$\mathscr{R}_2 = 8.20 \times 10^4\ \text{H}^{-1},$$

$$\mathscr{R}_3 = 2.93 \times 10^5\ \text{H}^{-1}。$$

由图 11-32 可得

$$F_3 = \Phi_3 \mathscr{R}_3 + \Phi_2 \mathscr{R}_2 \quad (1)$$

$$F_1 = \Phi_1 \mathscr{R}_1 + \Phi_2 \mathscr{R}_2 \quad (2)$$

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_3 \quad (3)$$

把式(3)中的 Φ_2 代入式(1)和(2)中，可得到关于 Φ_1 和 Φ_3 的一组方程：

$$F_1 = \Phi_1(\mathscr{R}_1 + \mathscr{R}_2) - \Phi_3 \mathscr{R}_2$$

$$F_3 = -\Phi_1 \mathscr{R}_2 + \Phi_3(\mathscr{R}_2 + \mathscr{R}_3)$$

即

$$19.3 = \Phi_1(3.25 \times 10^5) - \Phi_3(0.82 \times 10^5)$$

$$37.5 = -\Phi_1(0.82 \times 10^5) + \Phi_3(3.75 \times 10^5)$$

解方程，得 $\Phi_1 = 89.7\ \mu\text{Wb}$，$\Phi_2 = 30.3\ \mu\text{Wb}$，$\Phi_3 = 120\ \mu\text{Wb}$。

尽管以上方程组与两个网孔的电路问题类似，但注意，在计算相对磁导率和磁阻之前，应知道磁通密度 B_1、B_2 和 B_3。事实上，磁阻对于求解这类问题并没有多大帮助，因为如果知道了 B，可根据 $\Phi = BS$ 直接求出磁通。

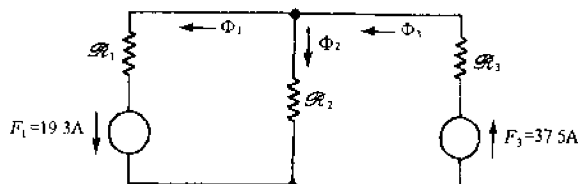


图 11-32

补 充 习 题

11.21 导体的内半径为 $a=2$mm,外导体的内半径为 $b=9$mm,求单位长度的电感。设 $\mu_r=1$。

答案:0.301 μH/m

11.22 半径为 1mm 的平行圆柱双导线,轴间的距离为 12mm,求单位长度的电感。

答案:0.992 μH/m

11.23 两个平行圆柱导体相距 1m,单位长度的电感为 2.12 μH/m。求导线的半径。

答案:5mm

11.24 均匀绕成的 2500 匝的空心螺线管线圈,长为 1.5m,半径为 2×10^{-2}m,求电感 L。

答案:6.58 mH

11.25 如图 11-3 所示,一个正方形截面的空心螺绕环线圈,内半径为 5cm,外半径为 7cm,高为 1.5cm。若电感为 495 μH,线圈匝数是多少? 用近似公式求解并比较两者的结果。

答案:700,704

11.26 如图 11-3 所示,一个正方形截面的空心螺绕环线圈,$r_1=80$cm,$r_2=82$cm,$a=1.5$cm,匝数为 700。试分别用两个公式求电感 L,并比较结果(见习题 11.5)。

答案:36.3 μH(分别用两个公式计算)

11.27 一个 5000 匝的螺线管线圈,$r_1=1.25$cm,$l_1=1.0$m,线圈内有 $\mu_r=50$ 的磁芯。另一个 500 匝的螺线管线圈,$r_2=2.0$cm,$l_2=10.0$cm,且与第一个线圈同轴同心,在线圈之间的空间内 $\mu\approx\mu_0$,求两线圈的互感。

答案:7.71mH

11.28 应用图 11-12 和 11-13,求当磁通密度为 0.4T 时铸铁、铸钢、硅钢和镍铁合金的相对磁导率。

答案:318,1384,5305,42,440

11.29 在长度 $l_a=2$mm 的气隙内磁通密度为 0.4T。若磁芯分别是(a)铸铁,(b)铸钢,(c)硅钢时,对于相同的 NI 降,分别求磁芯的长度。

答案:(a)0.64cm;(b)2.77m;(c)10.6m

11.30 磁路由两部分相同的铁磁性材料($\mu_r=4000$)组成。部分 1 的尺寸为 $l_1=50$mm 和 $S_1=104\text{mm}^2$;部分 2 的尺寸为 $l_2=30$mm 和 $S_2=120\text{mm}^2$。材料工作在相对磁导率与磁通密度成正比的 B-H 曲线部分。若磁通势为 4.0A,求磁通 Φ。

答案:26.3 μWb

11.31 一个半径为 20mm 的圆形截面螺绕环线圈,平均长度为 280mm,磁通为 Φ=1.50mWb。若磁芯是硅钢,求所需要的磁通势。

答案:83.2A

11.32 在图 11-33 中,磁路的两部分都是铸钢。部分 1 的尺寸为 $l_1=34$cm,$S_1=6\text{cm}^2$;部分 2 的尺寸为 $l_2=16$cm,$S_2=4\text{cm}^2$。若 $I_2=0.5$A,$N_1=200$ 匝,$N_2=100$ 匝,Φ=120 μWb,求线圈的电流 I_1。

答案:0.65 A

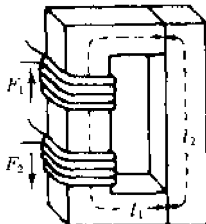
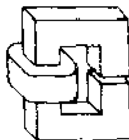


图 11-33


图 11-34

11.33 如图 11-34 所示,硅钢磁芯的截面是 10mm×8mm 的矩形,平均长度为 150mm。气隙的长度为 0.8mm,气隙内的磁通为 80 μWb。求磁通势。

答案:561.2 A

11.34 求习题 11.33 的反问题:已知线圈磁通势为 561.2A,求气隙内的磁通。假定气隙内的磁压降为 NI 的

90%，用试算的方法求解。

11.35 设习题 11.33 的硅钢磁路中的磁通势为 600A，求气隙内的磁通。

答案：85.2 μWb

11.36 如图 11-35 所示，对于习题 11.33 中的硅钢磁路，计算磁芯的磁阻 $\mathscr{R}_i$ 和气隙的磁阻 $\mathscr{R}_a$。假设磁通为 $\Phi = 80\ \mu$Wb，进一步求 F。

答案：$\mathscr{R}_i = 0.313\ \mu H^{-1}$，$\mathscr{R}_a = 6.70\ \mu H^{-1}$，$F = 561$ A

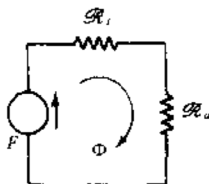


图 11-35

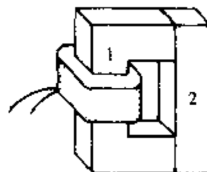


图 11-36

11.37 如图 11-34 所示，硅钢磁芯的矩形截面的面积为 $S_i = 80\text{mm}^2$，气隙的长度为 $l_a = 0.8$mm，面积为 $S_a = 95\text{mm}^2$，磁芯的平均长度为 150mm，磁通势为 600A。按照习题 11.13 的方法，通过作 Φ-F 的曲线图求解磁通。

答案：85 μWb

11.38 设磁通势为 600A，应用负气隙线，由作图法求解习题 11.37。

答案：85 μWb

11.39 按照习题 11.15 的方法，由作图法求解习题 11.37，并求出磁芯内的磁通密度。

答案：1.06T

11.40 在 40mm×60mm 的矩形截面铁芯内，磁通 $\Phi = 1.44$ mWb。铁芯的气隙长度 $l_a = 2.5$mm。求气隙内的 NI 降。

答案：1079A

11.41 半径为 2cm 的圆形截面螺绕环线圈内有平均长度为 28cm 的硅钢磁芯，气隙长度为 1mm。假设气隙面积 S_a 大于相邻磁芯截面面积的 10%，若使气隙内的磁通为 1.5mWb，求所需要的磁通势。

答案：952A

11.42 如图 11-36 所示，磁路的磁通势为 500A。部分 1 是铸钢，其中 $l_1 = 340$mm 和 $S_1 = 400\text{mm}^2$；部分 2 是铸铁，其中 $l_2 = 138$mm 和 $S_2 = 360\text{mm}^2$。求磁通 Φ。

答案：229 μWb

11.43 按照习题 11.16 的方法，用作图法求解习题 11.42。

答案：229 μWb

11.44 对于正方形截面的螺绕环线圈，$r_1 = 2$cm，$r_2 = 3$cm，高为 $a = 1$cm，在螺绕环线圈内有两部分磁芯。部分 1 是平均长度为 7.9cm 的硅钢，部分 2 是平均长度为 7.9cm 的镍铁合金。求磁通势为 17.38A 时所产生的磁通。

答案：10^{-4} Wb

11.45 由习题 11.15 的作图法求解习题 11.44，为什么把镍铁合金的 B-H 曲线画在硅钢的 B-H 曲线上求解没有想象的那么难？

答案：10^{-4} Wb。因为平均长度和截面积相同。

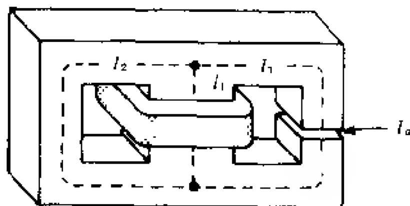


图 11-37

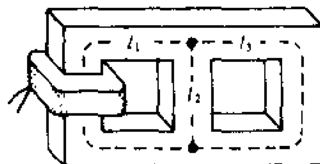


图 11-38

11.46 如图 11-37 所示，在由铸钢构成的并联磁路中，中间支路上有 500 匝的线圈，其截面面积是两侧支路截面面积的两倍。相关尺寸为 $l_a = 1$mm，$S_2 = S_3 = 150\text{mm}^2$，$S_1 = 300\text{mm}^2$，$l_1 = 40$mm，$l_2 = 110$mm，$l_3 =$

109mm。若在气隙中产生 125 μWb 的磁通，求线圈中所需要的电流。假定 S_a 超过 S_3 面积的 17%。

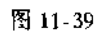
答案：1.34A

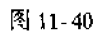
11.47 如图 11-38 所示，由铸铁构成的并联磁路上有 500 匝的线圈，所有支路的截面面积都为 1.5cm^2，平均长度为 $l_1 = l_3 = 10\text{cm}$ 和 $l_2 = 4\text{cm}$。求在支路 3 中产生 0.25T 的磁通密度时线圈中所需要的电流。

答案：1.05A

11.48 在两个都为 500 匝的线圈中通有相同的电流，线圈的绕向如图 11-39 所示。支路 3 的铸钢磁芯内磁通为 120 μWb。求线圈中的电流和支路 1 中的磁通。

答案：0.41A，0Wb


图 11-39


图 11-40

11.49 两个完全相同的线圈，绕向如图 11-40 所示。硅钢磁芯的截面面积都是 6cm^2。平均长度为 $l_1 = l_3 = 14\text{cm}$ 和 $l_2 = 4\text{cm}$。若在支路 1 中的磁通为 0.7 mWb，求线圈的磁通势。

答案：38.5 A

第 12 章　位移电流和感应电动势

12.1　位移电流

在静态场中，$\mathbf{H}$ 的旋度等于电流密度 $\mathbf{J}_c$。这里 $\mathbf{J}_c$ 是**传导**电流密度，加注下标 c 是为了强调运动的电荷如电子、离子等形成了电流。假设场和电荷随时间变化时 $\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}_c$ 仍然有效，那么连续性方程将是 $\nabla\cdot\mathbf{J}_c=\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{H})=0$，而这是不正确的。实际上

$$\nabla\cdot\mathbf{J}_c=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

因此，詹姆士·克勒克·麦克斯韦假定

$$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}_c+\mathbf{J}_D$$

式中 $\mathbf{J}_D\equiv\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$。

由于包含了**位移**电流密度 $\mathbf{J}_D$，所以连续性方程满足：

$$\nabla\cdot\mathbf{J}_c=-\nabla\cdot\mathbf{J}_D=-\nabla\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{D})=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

通过一个特定面的位移电流 i_D，可利用 $\mathbf{J}_D$ 在该而上的垂直分量的积分来获得(就像 i_c 可由 $\mathbf{J}_c$ 的而积分获得一样)：

$$i_D=\int_S\mathbf{J}_D\cdot d\mathbf{S}=\int_S\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}=\frac{d}{dt}\int_S\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}$$

这里假定曲面 S 在空间中是固定的。

例 1　利用斯托克斯定理(9.8 节)验证图 12-1 电路中成立 $i_c=i_D$。

解　由于两个面 S_1 和 S_2 有共同的环路 C，所以

$$\oint_C\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=\int_{S_1}(\nabla\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{S}=\int_{S_2}(\nabla\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{S}$$

$$=\int_{S_1}\left(\mathbf{J}_c+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)\cdot d\mathbf{S}=\int_{S_2}\left(\mathbf{J}_c+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)\cdot d\mathbf{S}$$

假定 $\mathbf{D}$ 被限制在两导电板之间的电介质内，这样过 S_1 有 $\mathbf{D}=\mathbf{0}$。由于在电介质内没有运动的自由电荷，所以过 S_2 有 $\mathbf{J}_c=\mathbf{0}$。因此

$$\int_{S_1}\mathbf{J}_c\cdot d\mathbf{S}=\int_{S_2}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}\qquad\text{即}\qquad i_c=i_D$$

应当注意在电介质内仅过 S_2 的 $\partial\mathbf{D}/\partial t$ 是非零的。

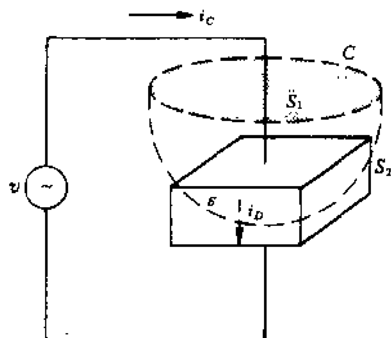


图 12-1

例 2　使用电路分析的方法重做例 1。

解　参考图 12-1，电容器的电容是

$$C=\frac{\varepsilon A}{d}$$

式中 A 是极板的面积，d 是两极板之间的距离，所以传导电流是

$$i_c=C\frac{dv}{dt}=\frac{\varepsilon A}{d}\frac{dv}{dt}$$

另一方面，忽略边缘效应，电介质中的电场是 $E=v/d$。因此

$$D=\varepsilon E=\frac{\varepsilon}{d}v,\qquad\frac{\partial D}{\partial t}=\frac{\varepsilon}{d}\frac{dv}{dt}$$

位移电流为(**D** 垂直于极板)

$$i_D = \int_A \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \int_A \frac{\varepsilon}{d}\frac{dv}{dt}dS = \frac{\varepsilon A}{d}\frac{dv}{dt} = i_c$$

12.2　J_c 与 J_D 的比

当一些材料既不是良导体又不是理想电介质时，材料中将同时存在传导电流和位移电流。图 12-2 给出了不良导体或有损耗电介质的模型。假设 **E** 的时间因子为 $e^{j\omega t}$，总电流密度是

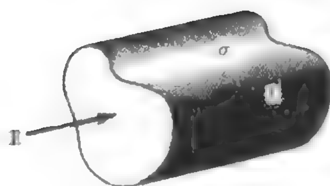


图 12-2

$$\mathbf{J}_t = \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_D = \sigma\mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\mathbf{E}) = \sigma\mathbf{E} + j\omega\varepsilon\mathbf{E}$$

由上式得

$$\frac{J_c}{J_D} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$$

不出所料，位移电流随频率的增加变得越来越大。

例 3　在半径为 1.5mm 的圆形横截面导体中通有 $i_c = 5.5\sin(4\times10^{10}t)(\mu\text{A})$ 的电流。如果 $\sigma = 35\text{MS/m}$ 和 $\varepsilon_r = 1$，位移电流密度的振幅是多少？

解

$$\frac{J_c}{J_D} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \frac{3.50\times10^7}{(4\times10^{10})(10^{-9}/36\pi)} = 9.90\times10^7$$

所以

$$J_D = \frac{(5.5\times10^{-6})/[\pi(1.5\times10^{-3})^2]}{9.90\times10^7} = 7.86\times10^{-3}\ \mu\text{A/m}^2$$

12.3　法拉第定律和楞次定律

法拉第定律(11.3 节)中的负号暗含了感应电压 v 的极性。为了说明这一点，考虑面积为 S 的平面，它由闭曲线 C 组成边界，并被时变磁通密度 **B** 垂直切割(图 12-3)。这里采用法拉第定律的积分形式

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$$

上式中，C 的正方向和 $d\mathbf{S}$ 的法线方向符合通常的右手定则(图 12-3(a))。现在如果 **B** 随着时间增加，那么时间导数将是正的，上面方程的右边将是负的。为了使左边的积分也是负的，**E** 的方向必须与图 12-3(b)所示环路的方向相反，用一个细导电丝代替环路，其中也将有沿 **E** 方向的电流 i_c。如图 12-3(c)所示，这样的一个电流回路将产生一个阻止 **B** 增加的通量 φ'。**楞次定律**总结了上面的情况：**由变化的磁通量产生的感应电压在闭合路径中所引起的电流又产生了一个磁通量，该磁通量将阻止原磁通量的变化。**

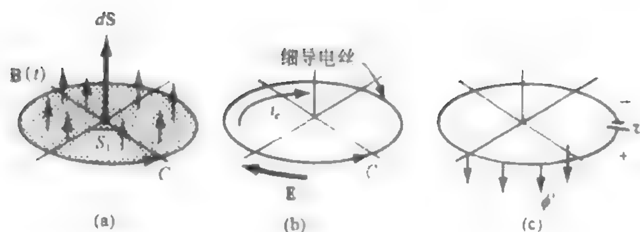


图 12-3

对于导体在非时变磁场中运动的情况，可通过两种不同的方法确定楞次定律中预言的感应电压的极性：(1)感应电压的极性使得导体受到一种阻止它运动的磁场力。(2)如图 12-4 所示，运动的导体试图切割在它前面的磁力线，并使这些磁力线变形，而闭合的磁力线试图按逆

时针方向绕过运动的导体。如果给导体提供一个闭合回路，根据右手定则可知，回路中的电流具有如图所示的方向，在电流流出导体的那一端感应电压的极性为正。图 12-5 通过对比运动的导体产生的电流和一个有电压源的类似外电路产生的电流，证实了上述说法。

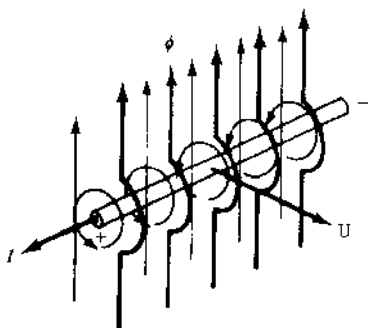


图 12-4

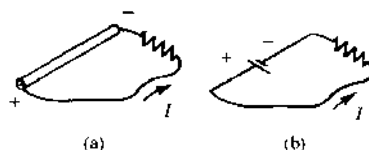


图 12-5

12.4　在恒定场中运动的导体

在磁场 **B** 中，以速度 **U** 运动的电荷 Q 上有力 **F**，这在第 10 章中已叙述过，即

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{U} \times \mathbf{B})$$

动生电场强度 $\mathbf{E}_m$ 定义为作用于单位电荷上的力：

$$\mathbf{E}_m = \frac{\mathbf{F}}{Q} = \mathbf{U} \times \mathbf{B}$$

当具有大量自由电荷的导体在磁场 **B** 中运动时，附加的 $\mathbf{E}_m$ 在导体两端之间产生一个电压，它的大小取决于 $\mathbf{E}_m$ 相对于导体的取向。设导体两端为 a 和 b，则 a 相对于 b 的电压是

$$v_{ab} = \int_b^a \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{l} = \int_b^a (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

如果速度 **U**、场 **B** 和导体三者相互垂直，则长为 l 的导体上的电压为

$$v = BlU$$

对于一个闭合回路，线积分必须沿整个回路积分：

$$v = \oint (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

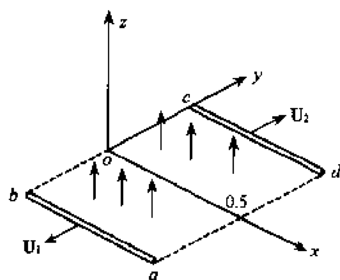


图 12-6

如果整个回路仅一部分运动，那么其他部分的 $\mathbf{E}_m$ 为零，所以只需要对运动部分积分。

例 4　图 12-6 中场为 $\mathbf{B} = 0.35\mathbf{a}_z \mathrm{T}$，两个导体棒以 $\mathbf{U}_1 = 12.5(-\mathbf{a}_y)\mathrm{m/s}$ 和 $\mathbf{U}_2 = 8.0\mathbf{a}_y \mathrm{m/s}$ 的速度朝外运动。求点 c 相对于点 b 的电压。

解　在两导体上，有

$$\mathbf{E}_{m1} = \mathbf{U}_1 \times \mathbf{B} = 4.38(-\mathbf{a}_x)\mathrm{V/m}, \qquad \mathbf{E}_{m2} = \mathbf{U}_2 \times \mathbf{B} = 2.80\mathbf{a}_x \mathrm{V/m}$$

因此

$$v_{ab} = \int_0^{0.50} 4.38(-\mathbf{a}_x) \cdot dx(-\mathbf{a}_x) = 2.19\mathrm{V}, \qquad v_{cd} = \int_0^{0.50} 2.80\mathbf{a}_x \cdot dx\mathbf{a}_x = 1.40\mathrm{V}$$

$$\begin{aligned} v_{cb} &= v_{cd} + v_{da} + v_{ab} \\ &= 1.4 + 0 + 2.19 = 3.59\mathrm{V} \end{aligned}$$

由于点 c 相对于点 b 的电压是正的，所以通过假想的仪表的电流将是沿 $\mathbf{a}_y$ 方向。电路中顺时针方向的电流产生沿 $-\mathbf{a}_z$ 方向的磁通量，这与楞次定律一致，由于电路的扩张，这一磁通量反抗沿 $+\mathbf{a}_z$ 方向的磁通量的增加。此外，**B** 施加在运动导体上的力与它们的运动方向相反。

12.5　在时变场中运动的导体

如果闭合导体回路是运动的(这包括形状的改变)，并且场 **B** 既是位置的函数也是时间的函数，那么总的感应电压由这两种通量改变的贡献组成。法拉第定律成为

$$v=-\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=\int_S\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}+\oint(\mathbf{U}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{l}$$

右边第一项是由于 **B** 改变时产生的电压，回路保持固定；第二项是由于回路运动引起的电压，**B** 保持固定。每项电压的极性由楞次定律确定，然后将这两项相加。

例5　如图12-7(a)所示，一平面导电回路关于 x 轴以角速度 ω 转动；当 $t=0$ 时，它在平面 xy 内，同时存在时变磁场 $\mathbf{B}=B(t)\mathbf{a}_z$。使用法拉第定律的两项形式，求回路中的感应电压。

解　设回路的面积为 A。由于 $\mathbf{a}_z\cdot\mathbf{a}_n=\cos\omega t$，所以 **B** 的变化对 v 的贡献是

$$v_1=-\int_S\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}=-\int_S\frac{dB}{dt}\mathbf{a}_z\cdot dS\mathbf{a}_n=-\frac{dB}{dt}A\cos\omega t$$

为了计算因导电回路的运动产生的对 v 的贡献，应知道回路上某点的速度 **U**。由于 $\mathbf{a}_n\times\mathbf{a}_z=\sin\omega t(-\mathbf{a}_x)$，所以由图12-7(b)可知

$$\mathbf{U}=r\omega\mathbf{a}_n=\frac{y}{\cos\omega t}\omega\,\mathbf{a}_n$$

$$\mathbf{U}\times\mathbf{B}=\frac{y}{\cos\omega t}\omega\mathbf{a}_n\times B\,\mathbf{a}_z=\frac{y}{\cos\omega t}\omega B\sin\omega t(-\mathbf{a}_x)$$

从而

$$v_2=\oint(\mathbf{U}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{l}=-\frac{\omega B\sin\omega t}{\cos\omega t}\oint y\mathbf{a}_x\cdot d\mathbf{l}$$

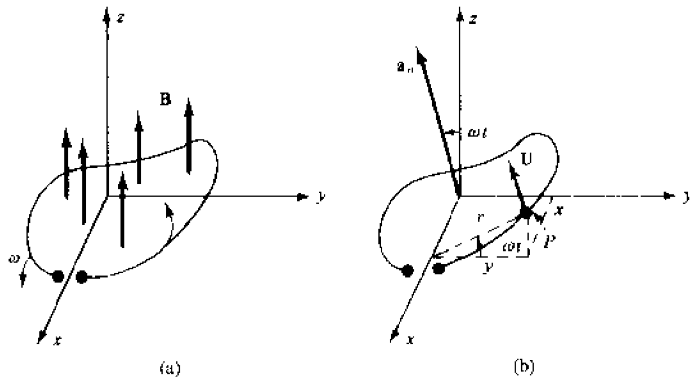


图12-7

利用斯托克斯定理(9.8节)来计算上面的积分，由于 $\nabla\times y\mathbf{a}_x=-\mathbf{a}_z$，从而有

$$\oint y\mathbf{a}_x\cdot d\mathbf{l}=\int_S(\nabla\times y\mathbf{a}_x)\cdot d\mathbf{S}=\int_S(-\mathbf{a}_z)\cdot dS\mathbf{a}_n=-A\cos\omega t$$

$$v_2=-\frac{\omega B\sin\omega t}{\cos\omega t}(-A\cos\omega t)=BA\omega\sin\omega t$$

习　题　求　解

12.1　在 $\sigma=5.0\,\text{S/m}$ 和 $\epsilon_r=1$ 的材料中，电场强度为 $E=250\sin10^{10}t\,(\text{V/m})$。求传导电流密度和位移电流密度以及两者具有相等值时的频率。



$$J_c=\sigma E=1250\sin10^{10}t\ (\text{A/m}^2)$$

假设场方向不随时间变化，则有

$$J_D = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \varepsilon_r 250 \sin 10^{10} t) = 22.1 \cos 10^{10} t \ (\mathrm{A/m^2})$$

当 $J_c = J_D$ 时，有

$$\sigma = \omega\varepsilon \qquad 或 \qquad \omega = \frac{5.0}{8.854 \times 10^{-12}} = 5.65 \times 10^{11} \mathrm{rad/s}$$

即当频率 $f = 8.99 \times 10^{10}$ Hz = 89.9 GHz 时，它们是等值的。

12.2 长度为 500mm、内径为 5mm、外径为 6mm 的同轴电容器中有 $\varepsilon_r = 6.7$ 的电介质，外加电压为 $250\sin 377t$(V)。确定位移电流 i_D，并与传导电流 i_c 相比较。

假设在内导体处 $v = 0$，则由习题 8.7 可知，在区域 $0.005 \leqslant r \leqslant 0.006$m 内的电位是

$$v = \left(\frac{250}{\ln\left(\frac{6}{5}\right)} \sin 377t\right)\left(\ln \frac{r}{0.005}\right) \ (\mathrm{V})$$

由此可得

$$\mathbf{E} = -\nabla v = \frac{1.37 \times 10^3}{r} \sin 377t \ \mathbf{a}_r \ (\mathrm{V/m})$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = -\frac{8.13 \times 10^{-8}}{r} \sin 377t \ \mathbf{a}_r \ (\mathrm{C/m^2})$$

$$\mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\frac{3.07 \times 10^{-5}}{r} \cos 377t \ \mathbf{a}_r \ (\mathrm{A/m^2})$$

$$i_D = J_D(2\pi r L) = \int_S \mathbf{J}_D \cdot d\mathbf{S} = 9.63 \times 10^{-5} \cos 377t \ (\mathrm{A})$$

又由于电容为

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon_r L}{\ln\left(\frac{6}{5}\right)} = 1.02 \ \mathrm{nF}$$

所以

$$i_c = C\frac{dv}{dt} = (1.02 \times 10^{-9})(250)(377)(\cos 377t)$$

$$= 9.63 \times 10^{-5} \cos 377t \ (\mathrm{A})$$

由上可知，$i_c = i_D$。

12.3 潮湿土壤的电导率为 10^{-3}S/m 且 $\varepsilon_r = 2.5$，其中

$$E = 6.0 \times 10^{-6} \sin 9.0 \times 10^9 t \ (\mathrm{V/m})$$

求 J_c 和 J_D。

$J_c = \sigma E = 6.0 \times 10^{-9} \sin 9.0 \times 10^9 t \ (\mathrm{A/m^2})$。由于 $D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E$，所以

$$J_D = \frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial E}{\partial t} = 1.20 \times 10^{-6} \cos 9.0 \times 10^9 t \ (\mathrm{A/m^2})$$

12.4 求图 12-8 中导体上的感应电压，此处 $\mathbf{B} = 0.04 \ \mathbf{a}_y$ T 和

$$\mathbf{U} = 2.5 \sin 10^3 t \mathbf{a}_z \ (\mathrm{m/s})$$

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{U} \times \mathbf{B} = 0.10 \sin 10^3 t(-\mathbf{a}_x) \ (\mathrm{V/m})$$

$$v = \int_0^{0.20} 0.10 \sin 10^3 t(-\mathbf{a}_x) \cdot dx \ \mathbf{a}_x$$

$$= 0.02 \sin 10^3 t \ (\mathrm{V})$$

当沿 $\mathbf{a}_z$ 方向移动导体时，对于前半周期，$x = 0.20$ 端的电压是负的。

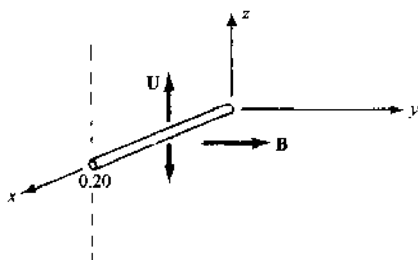


图 12-8

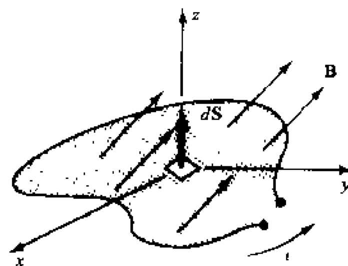


图 12-9

12.5 如果磁场变为 $\mathbf{B}=0.04\,\mathbf{a}_x$(T)，重做习题 12.4。

因为 **B** 和 $d\mathbf{l}$ 总是平行的，导体没有切割场线，所以感应电压必然是零。可用习题 1.8 来分析证实：

$$v=\int(\mathbf{U}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{l}=\int\mathbf{U}\cdot(\mathbf{B}\times d\mathbf{l})=0$$

12.6 如图 12-9 所示，在平面 $z=0$ 内，一块面积为 $0.65\mathrm{m}^2$ 的区域被细导体包围，已知

$$\mathbf{B}=0.05\cos 10^3 t\left(\frac{\mathbf{a}_y+\mathbf{a}_z}{\sqrt{2}}\right)\ (\mathrm{T})$$

求感应电压。

$$v=\int_S\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot dS\mathbf{a}_z=\int_S 50\sin 10^3 t\left(\frac{\mathbf{a}_y+\mathbf{a}_z}{\sqrt{2}}\right)\cdot dS\mathbf{a}_z=23.0\sin 10^3 t\ (\mathrm{V})$$

磁场是余弦函数，它在第一个半周期内是增加的，所以在闭合回路中感应电流 i 的方向应阻止这一增加。因此，电流应有如图 12-9 所示的方向。

12.7 如图 12-10 所示，在平面 $z=0$ 内有一半径为 0.10m、电阻为 5.0Ω 的圆环导体。已知 $\mathbf{B}=0.20\sin 10^3 t\,\mathbf{a}_z$(T)，确定导体内的电流。

$$\varphi=\mathbf{B}\cdot\mathbf{S}=2\times 10^{-3}\pi\sin 10^3 t\ (\mathrm{Wb})$$

$$v=-\frac{d\varphi}{dt}=-2\pi\cos 10^3 t\ (\mathrm{V})$$

$$i=\frac{v}{R}=-0.4\pi\cos 10^3 t\ (\mathrm{A})$$

当 $t=0_+$ 时通量是增加的，为了阻止这一增加，圆环导体与正 x 轴相交处的感应电流此时必沿 $-\mathbf{a}_y$ 方向。

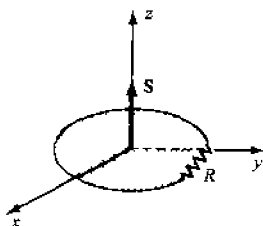


图 12-10

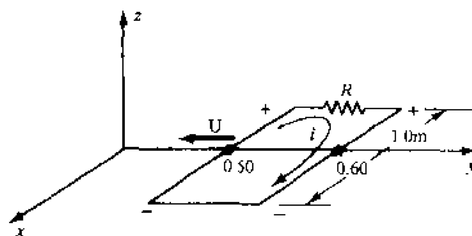


图 12-11

12.8 如图 12-11 所示，矩形回路在场中以 $\mathbf{U}=-250\mathbf{a}_y$ m/s 的速度向原点移动，场为

$$\mathbf{B}=0.80e^{-0.50y}\mathbf{a}_z(\mathrm{T})$$

求当线圈边在 $y=0.50$m 和 0.60m 处、电阻为 $R=2.5\Omega$ 时的瞬时电流。

仅长为 1.0m 的边有感应电压。设在 $y=0.50$m 处的边的编号是 1，则

$$v_1=B_1 l U=0.80e^{-0.25}(1)(250)=155.8\mathrm{V},\quad v_2=B_2 l U=148.2\mathrm{V}$$

电压极性如图所示，瞬时电流是

$$i=\frac{155.8-148.2}{2.5}=3.04\ \mathrm{A}$$

12.9 长度为 1cm 的导体与 z 轴平行，它以 1200r/min 沿半径为 25cm 的圆周转动（见图 12-12）。如果已知径向场为 $\mathbf{B}=0.5\mathbf{a}_r$T，求导体两端的感应电压。

角速度是

$$\left(1200\,\frac{转}{分}\right)\left(\frac{1}{60}\,\frac{分}{秒}\right)\left(2\pi\,\frac{弧度}{转}\right)=40\pi\,\frac{弧度}{秒}$$

因此

$$U=r\omega=(0.25)(40\pi)\mathrm{m/s}$$

$$\mathbf{E}_m=10\pi\mathbf{a}_\varphi\times 0.5\mathbf{a}_r=5.0\pi(-\mathbf{a}_z)\mathrm{V/m}$$

$$v=\int_0^{0.01}5.0\pi(-\mathbf{a}_z)\cdot dz\mathbf{a}_z=-5.0\times 10^{-2}\pi\ \mathrm{V}$$

负号表明导体的下端电位高于上端电位。

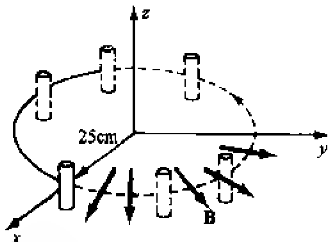


图 12-12

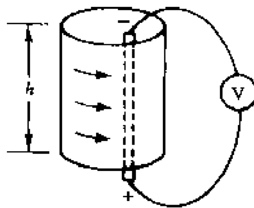


图 12-13

12.10 半径为 7cm、高为 15cm 的导电圆柱，在径向场 $\mathbf{B}=0.20\mathbf{a}_r$T 中以 600r/min 转动。在圆柱的顶部和底部通过滑动接触连接到一个电压表上，如图 12-13 所示。求感应电压。

解答

$$\omega=(600)\left(\frac{1}{60}\right)(2\pi)=20\pi\ \text{rad/s}$$

$$\mathbf{U}=(20\pi)(0.07)\mathbf{a}_\varphi\ \text{m/s}$$

$$\mathbf{E}_m=\mathbf{U}\times\mathbf{B}=0.88(-\mathbf{a}_z)\ \text{V/m}$$

弧形面的每一个垂直元切割相同的磁通量，且具有相同的感应电压。这些垂直元可视为并联连接，任一个垂直元上的感应电压与总的感应电压相等，所以

$$v=\int_0^{0.15}0.88(-\mathbf{a}_z)\cdot dz\mathbf{a}_z=-0.13\ \text{V}\qquad(\text{正电位端在底部})$$

12.11 在图 12-14 中，具有电阻 $R=0.20\Omega$ 的矩形导电回路以 500r/min 的转速转动。在 $r_1=0.03$m 处的垂直导体位于场 $\mathbf{B}_1=0.25\mathbf{a}_r$T 中；在 $r_2=0.05$m 处的垂直导体位于场 $\mathbf{B}_2=0.80\mathbf{a}_r$T 中。求回路中的电流。

解答

$$\mathbf{U}_1=(500)\left(\frac{1}{60}\right)(2\pi)(0.03)\mathbf{a}_\varphi=0.50\pi\mathbf{a}_\varphi\ \text{m/s}$$

$$v_1=\int_0^{0.50}(0.50\pi\ \mathbf{a}_\varphi\times0.25\ \mathbf{a}_r)\cdot dz\ \mathbf{a}_z=-0.20\ \text{V}$$

同理，$\mathbf{U}_2=0.83\pi\mathbf{a}_\varphi$m/s 和 $v_2=-1.04$V。所以

$$i=\frac{1.04-0.20}{0.20}=4.20\ \text{A}$$

方向如图 12-14 所示。

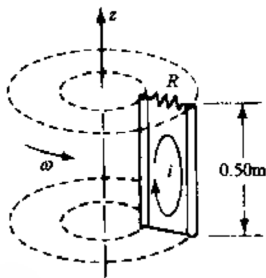


图 12-14

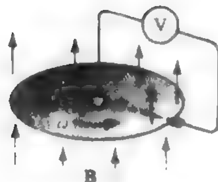


图 12-15

12.12 如图 12-15 所示，圆盘在均匀通量密度 $\mathbf{B}=B\mathbf{a}_z$ 中以 ω(rad/s)的转速转动。通过滑动接触将一个电压表连到盘上。试求出这个**法拉第单极发电机**上电压表指示的电压。

解答 分析盘上的一个径向元。在径向元上任意点处的速度为 $\mathbf{U}=\omega r\ \mathbf{a}_\varphi$，因此

$$\mathbf{E}_m=\mathbf{U}\times\mathbf{B}=\omega rB\ \mathbf{a}_r$$

和

$$v=\int_0^a\omega rB\ \mathbf{a}_r\cdot dr\ \mathbf{a}_r=\frac{\omega a^2B}{2}$$

式中 a 是盘的半径。v 为正值表明对于图示 $\mathbf{B}$ 和 ω 的方向，盘边相对于中心处的电压是正的。

12.13 如图 12-16(a)所示，边长为 0.60m 的正方形线圈，在场 $\mathbf{B}=0.80\mathbf{a}_z$T 中以 $\omega=60\pi$ rad/s 的转速绕 x 轴转动。求感应电压。

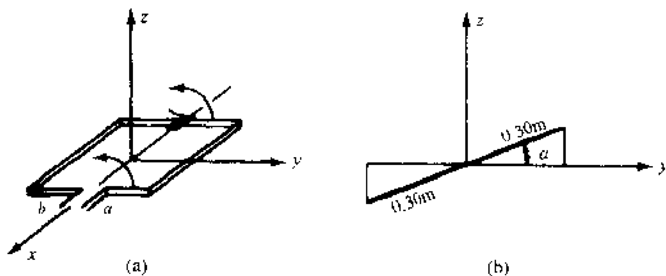


图 12-16

解 假设线圈原先在平面 xy 内。角

$$\alpha = \omega t = 60\pi t \ (\mathrm{rad})$$

投射到平面 xy 上的面积为(见图 12-16(b))

$$A = (0.6)(0.6\cos 60\pi t) \quad (\mathrm{m}^2)$$

所以

$$\varphi = BA = 0.288\cos 60\pi t \quad (\mathrm{Wb})$$

$$v = -\frac{d\varphi}{dt} = 54.3\sin 60\pi t \quad (\mathrm{V})$$

楞次定律表明,这是点 a 相对于点 b 的电压。

另一种方法:平行于 x 轴的每一边都有一速度的 y 分量,其大小是

$$|U_y| = |r\omega\sin\alpha| = |18.0\pi\sin 60\pi t| \ (\mathrm{m/s})$$

两边的感应电压为 $Bl|U_y|$,相加可得

$$|v| = 2(Bl|U_y|) = |54.3\sin 60\pi t| \ (\mathrm{V})$$

利用楞次定律可以正确地确定感应电压的符号。

12.14 通过利用原始的方法即法拉第定律的微分形式验证例 5。

解 由图 12-7(b)可知,垂直投射到场中的面积是 $A\cos\omega t$,因此

$$\varphi = B(t)(A\cos\omega t)$$

和

$$v = -\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{dB}{dt}A\cos\omega t + BA\omega\sin\omega t = v_1 + v_2$$

(使用微分形式求解更简单。)

12.15 求习题 12.11 的回路中产生的电功率,并通过计算回路的机械功率验证这个结果。

解 电功率是消耗在电阻器中的功率:

$$P_e = i^2R = (4.20)^2(0.20) = 3.53\mathrm{W}$$

场施加在两个垂直导体上的力是

$$\mathbf{F}_1 = i(\mathbf{l}_1 \times \mathbf{B}_1) = (4.20)(0.50)(0.25)(\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_r) = 0.525\ \mathbf{a}_\varphi\ \mathrm{N}$$

$$\mathbf{F}_2 = i(\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}_2) = (4.20)(0.50)(0.80)(-\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_r) = -1.68\ \mathbf{a}_\varphi\ \mathrm{N}$$

为了使回路转动,必须施加力 $-\mathbf{F}_1$ 和 $-\mathbf{F}_2$,这些力的功率为

$$P = (-\mathbf{F}_1)\cdot\mathbf{U}_1 + (-\mathbf{F}_2)\cdot\mathbf{U}_2 = (-0.525)(0.50\pi) + (1.68)(0.83\pi) = 3.55\mathrm{W}$$

补 充 习 题

12.16 已知在有损耗介质内,传导电流密度为 $J_c = 0.02\sin 10^9 t$ (A/m²)。如果 $\sigma = 10^3$S/m 和 $\epsilon_r = 6.5$,求位移电流密度。

答案:$1.15\times10^{-6}\cos 10^9 t$ (A/m²)

12.17 在半径为 1.5mm 的圆形横截面导体内通以 $i_c = 5.5\sin 4\times10^{10} t$ (μA)的电流。如果 $\sigma = 35$MS/m 和 $\epsilon_r = 1$,位移电流密度的振幅是多少?

答案:7.87×10^{-3} μA/m²

12.18 求传导电流密度和位移电流密度相等时的频率:(a)蒸馏水,此处 $\sigma = 2.0\times10^{-4}$S/m 和 $\epsilon_r = 81$;(b)海

水，此处 $\sigma=4.0$S/m 和 $\varepsilon_r=1$ 。

答案：(a)4.44×10^4 Hz；(b)7.19×10^{10} Hz；

12.19 半径分别为 $r_1=0.5$mm 和 $r_2=1$mm 的同心导电球壳被 $\varepsilon_r=8.5$ 的介质分离开。已知外加电压为 $v=150\sin5000t$(V)，求电容，并计算 i_c；再求位移电流 i_D，并把它和 i_c 相比较。

答案：$i_c=i_D=7.09\times10^{-7}\cos5000t$ (A)

12.20 面积为 0.05m^2 的两个平行导电板被 $\varepsilon_r=8.3$ 和 $\sigma=8.0\times10^{-4}$S/m 的有损耗介质分离开 2mm。已知外加电压为 $v=10\sin10^7t$(V)，求电流的有效值。

答案：0.192A

12.21 一平行板电容器被 $\varepsilon_r=15.3$ 的电介质隔开 0.6mm，在其两端加频率为 15GHz、有效值为 25V 的电压。忽略边缘效应，求位移电流密度的有效值。

答案：$5.32\times10^5\text{A/m}^2$

12.22 在场 $\mathbf{B}=0.04\mathbf{a}_y$T 中，位于 x 轴上 $x=0$ 和 $x=0.2$m 之间的导体以速度 $\mathbf{U}=6.0\mathbf{a}_z$m/s 运动。利用以下各量求感应电压：(a)动生电场强度，(b)$d\varphi/dt$，(c)BlU。如果导体被连到一个闭合回路上，试确定感应电压的极性，并讨论楞次定律。

答案：0.048V ($x=0$ 端是正的)

12.23 当 $\mathbf{B}=0.04\sin kz\ \mathbf{a}_y$ T 时，重做习题 12.22。当 $\mathbf{B}$ 的方向改变时，讨论楞次定律。

答案：$0.048\sin kz$(V)

12.24 如图 12-17 所示，平行于 y 轴的棒形导体在 $y=0$ 和 $y=0.05$m 处通过滑动接触与其他导体组成一个闭环。(a)当棒静止在 $x=0.05$m 处，且 $\mathbf{B}=0.30\sin10^4t\,\mathbf{a}_z$T 时，求感应电压。(b)当棒以 $\mathbf{U}=150\mathbf{a}_x$ m/s 的速度运动时重求感应电压并讨论极性。

答案：(a) $-7.5\cos10^4t$ (V)；(b) $-7.5\cos10^4t-2.25\sin10^4t$ (V)

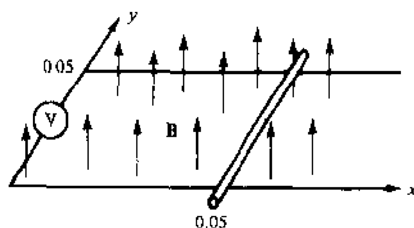


图 12-17

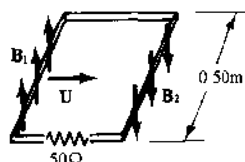


图 12-18

12.25 在图 12-18 中，矩形线圈以 $\mathbf{U}=2.5$m/s 的速度向右运动。左边垂直切割磁力线，且 $B_1=0.30$T，右边垂直切割等值反向的磁力线。求线圈中的瞬时电流，并利用楞次定律讨论它的方向。

答案：15mA(逆时针方向)

12.26 在平面 $z=0$ 内，有一各边均平行于坐标轴的矩形导电回路，其 y 方向的尺寸为 1cm，x 方向的尺寸为 2cm，电阻是 5.0Ω。当线圈边位于 $x=20$cm 和 $x=22$cm 处时，线圈沿 x 轴以 2.5m/s 的速度向原点运动。如果 $\mathbf{B}=5.0e^{-10x}\mathbf{a}_z$T，求电流。当线圈边位于 $x=5$cm 和 $x=7$cm 处时，重求电流。

答案：0.613mA，2.75mA

12.27 如图 12-19 所示，长为 2.0m 的导体在径向场 $\mathbf{B}=0.10\sin\varphi\ \mathbf{a}_r$T 中以 1200r/min 的转速转动。求具有 100Ω 电阻的导电闭环中的电流并讨论极性和电流方向。

答案：$5.03\times10^{-2}\sin40\pi t$(A)

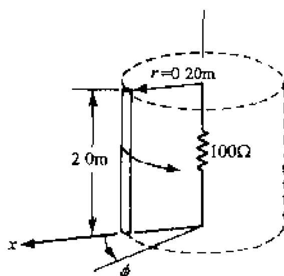


图 12-19

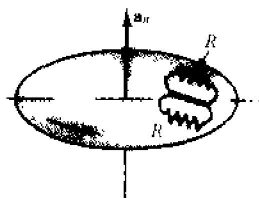


图 12-20

12.28 在径向场 $\mathbf{B}=0.50\mathbf{a}_r$ T中，长为0.01m、平行于 z 轴的两个导体分别位于 $r=0.23$m 和 $r=0.25$m 处。如果两个导体在平面 $\varphi=40\pi t$ 内被径向导体连接起来，那么能产生环流的感应电压为多少？

答案：12.6mV

12.29 在图12-20中，在旋转的玻璃盘上的 $3\leqslant r\leqslant 6$cm 处放置一个径向导体，两个11.2mΩ的电阻器组成两个电路，盘以12r/min的转速旋转。如果盘处于场 $\mathbf{B}=0.30\mathbf{a}_n$ T中，计算产生的电功率。场对旋转有什么影响？应用楞次定律讨论这个问题

答案：46.3μW

12.30 把电表连接于法拉第盘式发电机（习题12.12）上的 $r_1=1$mm 和 $r_2=100$mm 之间，当盘在0.80T的磁通密度中以500r/min的转速转动时，产生的电压是多少？

答案：0.209V

12.31 如图12-16(a)所示，宽（y 方向上的尺寸）为75mm、长（x 方向上的尺寸）为100mm的线圈在 $\mathbf{B}=0.45\mathbf{a}_y$ T的均匀场中产生有效值为0.25V的电压时，线圈转动的速度是多少？

答案：1000r/min

第 13 章 麦克斯韦方程组和边界条件

13.1 引言

第 7 章中探讨了静态场中电场强度 **E** 和电通密度 **D** 穿过两种不同物质分界面时的特性。本章对静态场的磁场强度 **H** 和磁通密度 **B** 作类似处理。这将完成对四种基本矢量场的边界条件的研究。

第 12 章讨论时变场时引入了位移电流密度 $\mathbf{J}_D$，并探讨了法拉第定律。本章把第 12 章中的方程和前几章推导出的方程组合在一起形成**麦克斯韦方程组**，它构成了整个电磁场理论的基础，应该牢记。

13.2 磁场的边界关系

在两种不同物质的分界面上分析 **H** 和 **B** 时，可以预测它们会发生突变，类似于两种不同物质分界面上 **E** 和 **D** 的变化情况(见 7.7 节)。

图 13-1 所示的分界面把具有参数 σ_1 和 μ_{r1}的物质 1 和具有参数 σ_2 和 μ_{r2}的物质 2 分开。**B** 的特性可通过跨越分界面两侧的小直圆柱体确定，如图 13-1 所示。由于磁通是连续的，所以

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \int_{底面1}\mathbf{B}_1\cdot d\mathbf{S}_1 + \int_{圆柱面}\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} + \int_{底面2}\mathbf{B}_2\cdot d\mathbf{S}_2 = 0$$

如果圆柱的两底面彼此靠近，并保持它们之间的分界面不动，则圆柱体的侧面积将趋于零，即

$$\int_{底面1}\mathbf{B}_1\cdot d\mathbf{S}_1 + \int_{底面2}\mathbf{B}_2\cdot d\mathbf{S}_2 = 0$$

或

$$-B_{n1}\int_{底面1} dS_1 + B_{n2}\int_{底面2} dS_2 = 0$$

根据上式，得

$$B_{n1} = B_{n2}$$

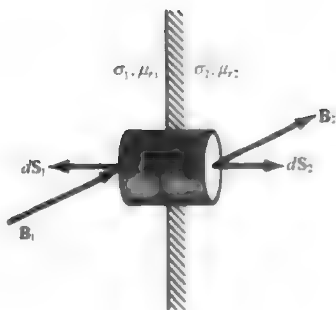


图 13-1

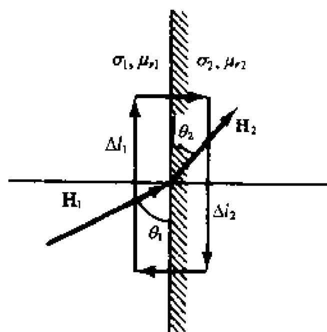


图 13-2

总之，**分界面两侧 B 的法向分量是连续的**。注意，计算 B_{n1}和 B_{n2}时只需采用两个法线方向其中之一即可。

H 穿过分界面的变化可通过沿闭合矩形回路应用安培定律获得，如图 13-2 所示。假定分界面上不存在电流，令矩形收缩至零，有

$$0 = \oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} \to H_{t1}\Delta l_1 - H_{t2}\Delta l_2$$

即

$$H_{t1} = H_{t2}$$

因而 **H** 在矩形的两边具有相同的投影。由于矩形回路可沿法线旋转 90°，所以重复以上推导可得到

$$H_{t1} = H_{t2}$$

总之，**分界面上不存在电流时分界面两侧 H 的切向分量连续。**

由类似于7.7节例6的方法，可得到分界面上不存在电流时 $\mathbf{H}_1$ 和 $\mathbf{H}_2$ 与分界面(见图13-2)的切向矢量的小夹角之间的关系，即

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}}$$

13.3　边界上的面电流

如果分界面上的材料具有非零的电导率，那么可能有电流存在。这种电流可能遍布于整个物质表面，但我们仅考虑分界面上有面电流的情况。

图13-3给出了均匀面电流密度 $\mathbf{K} = K_0\mathbf{a}_y$，它位于区域1和区域2的分界面 $x=0$ 上。关于由这个面电流产生的磁场 $\mathbf{H}'$，可根据9.2节中的例2得到：

$$\mathbf{H}_1' = \frac{1}{2}\mathbf{K}\times\mathbf{a}_{n1} = \frac{1}{2}K_0\,\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{H}_2' = \frac{1}{2}\mathbf{K}\times\mathbf{a}_{n2} = \frac{1}{2}K_0(-\mathbf{a}_z)$$

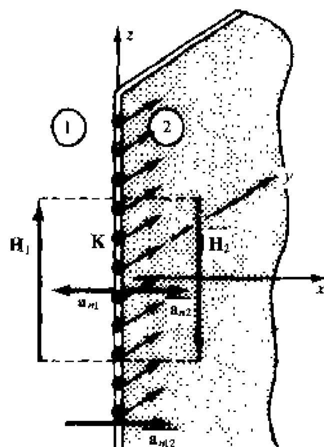


图 13-3

因而在分界面上 $\mathbf{H}'$ 具有大小为 $|K_0|$ 的突变。如果存在由某一其他源产生的另一磁场 $\mathbf{H}''$，且它的切向分量在分界面上是连续的，那么合成磁场

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}' + \mathbf{H}''$$

的切向分量将具有大小为 $|K_0|$ 的突变。这可用矢量表示为

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)\times\mathbf{a}_{n12} = \mathbf{K}$$

式中 $\mathbf{a}_{n12}$ 是由区域1指向区域2的单位法向矢量。这个矢量关系式并不依赖于所选择的坐标系，它对非均匀的面电流同样成立，其中 **K** 是边界面上所讨论点处的电流密度值。

13.4　边界条件的总结

下面列出在两种电介质分界面两侧的 **H** 和 **B** 分别满足的关系式，同时分别列出 **E** 和 **D** 满足的关系式：

磁　场		电　场	
$B_{n1} = B_{n2}$		$D_{n1} = D_{n2}$	(不存在面电荷)
$H_{t1} = H_{t2}$	(不存在面电流)	$(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2)\cdot\mathbf{a}_{n12} = -\rho_S$	(存在面电荷)
$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)\times\mathbf{a}_{n12} = \mathbf{K}$	(存在面电流)	$E_{t1} = E_{t2}$	
$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}}$	(不存在面电流)	$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}$	(不存在面电荷)

这些关系均是在静态条件下获得的，在第14章中会发现它们同样适用于时变场。

13.5　麦克斯韦方程组

磁场 **H** 不存在时，静电场 **E** 可以存在，带有静电荷 Q 的电容器就是一个例子。同样，载有恒定电流 I 的导体产生磁场 **H**，而不产生电场 **E**。然而，当场是时变场时，没有场 **E**，场 **H** 就不会存在；没有相应的场 **H**，场 **E** 也不存在。尽管可以从静态场理论中获得许多有价值的信息，但是只有时变场才能体现出电磁场理论的全部价值。法拉第和赫兹的试验以及麦克斯韦

的理论分析都涉及到时变场。

前面几章分别推导和分析了下面的一组方程，即**麦克斯韦方程组**。表 13-1 给出了一般形式，这里考虑了场区中的电荷和传导电流。注意，根据斯托克斯定理，前两个方程的点形式和积分形式是等价的，而根据散度定理，后两个方程的点形式和积分形式是等价的。

表 13-1　一般形式的麦克斯韦方程组

点形式	积分形式
$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}_c+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=\int_S\left(\mathbf{J}_c+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)\cdot d\mathbf{S}$　（安培定律）
$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\int_S\left(-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)\cdot d\mathbf{S}$　（法拉第定律；S 不变）
$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$	$\oint_S\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}=\int_v\rho\,dv$　（高斯定律）
$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$	$\oint_S\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=0$　（不存在磁单极子）

对于不存在电荷（$\rho=0$）和传导电流（$\mathbf{J}_c=0$）的自由空间，麦克斯韦方程组可采用表 13-2 所示的形式。

表 13-2　自由空间中的麦克斯韦方程组

点形式	积分形式
$\nabla\times\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=\int_S\left(\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)\cdot d\mathbf{S}$
$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\int_S\left(-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)\cdot d\mathbf{S}$
$\nabla\cdot\mathbf{D}=0$	$\oint_S\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}=0$
$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$	$\oint_S\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=0$

自由空间中的第一个和第二个点形式的方程可用来说明时变场 **E** 和 **H** 不能独立存在。例如，如果 **E** 是时间的函数，那么 $\mathbf{D}=\epsilon_0\mathbf{E}$ 也将是时间的函数，所以 $\partial\mathbf{D}/\partial t$ 是非零的，$\nabla\times\mathbf{H}$ 也是非零的，这表明一定存在非零的 **H**。同理，第二个方程可用来说明如果 **H** 是时间的函数，那么场 **E** 一定存在。

麦克斯韦方程组的点形式在解决问题时用得最频繁。然而，积分形式也很重要，因为它能更好地体现基本物理定律。

习　题　求　解

13.1　在图 13-4 的区域 1 中，$\mathbf{B}_1=1.2\mathbf{a}_x+0.8\mathbf{a}_y+0.4\mathbf{a}_z$ (T)。求 $\mathbf{H}_2$（即在 $z=+0$ 处的 **H**）和场矢量与分界面切向之间的夹角。

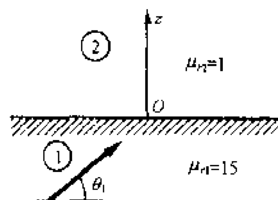


图 13-4

由 $\mathbf{B}_1$ 可直接写出 $\mathbf{H}_1$，然后根据分界面上不存在电流时的分界面两侧 **B** 的法向分量连续以及 **H** 的切向分量连续这两条法则可直接写出 $\mathbf{B}_2$ 和 $\mathbf{H}_2$ 的分量：

$$\mathbf{B}_1=1.2\mathbf{a}_x+0.8\mathbf{a}_y+0.4\mathbf{a}_z\quad(\mathrm{T})$$

$$\mathbf{H}_1=\frac{1}{\mu_0}(8.0\mathbf{a}_x+5.33\mathbf{a}_y+2.67\mathbf{a}_z)10^{-2}\quad(\mathrm{A/m})$$

$$\mathbf{H}_2=\frac{1}{\mu_0}(8.0\mathbf{a}_x+5.33\mathbf{a}_y+10^2\mu_0H_{z2}\mathbf{a}_z)10^{-2}\quad(\mathrm{A/m})$$

$$\mathbf{B}_2=B_{x2}\mathbf{a}_x+B_{y2}\mathbf{a}_y+0.4\mathbf{a}_z\quad(\mathrm{T})$$

于是可直接得到其他表达式：

$$B_{x2}=\mu_0\mu_{r2}H_{x2}=8.0\times10^{-2}\quad(\mathrm{T}),$$

$$B_{y2} = 5.33 \times 10^{-2} \quad (\text{T}),$$

$$H_{z2} = \frac{B_{z2}}{\mu_0 \mu_{r2}} = \frac{0.4}{\mu_0} \quad (\text{A/m})$$

角 θ_1 为 $90° - \alpha_1$，其中 α_1 是 $\mathbf{B}_1$ 和法向 $\mathbf{a}_z$ 之间的夹角。

$$\cos\alpha_1 = \frac{\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{a}_z}{|\mathbf{B}_1|} = 0.27$$

据此，$\alpha_1 = 74.5°$ 且 $\theta_1 = 15.5°$。同理，$\theta_2 = 76.5°$。

根据本题可验证：$(\tan\theta_1)/(\tan\theta_2) = \mu_{r2}/\mu_{r1}$。

13.2 $\mu_{r1} = 3$ 的区域 1 定义为 $x<0$；$x>0$ 的区域 2 具有 $\mu_{r2} = 5$。已知

$$\mathbf{H}_1 = 4.0\mathbf{a}_x + 3.0\mathbf{a}_y - 6.0\mathbf{a}_z \quad (\text{A/m})$$

试说明 $\theta_2 = 19.7°$，$H_2 = 7.12$ A/m。

解 与习题 13.1 的求解方法类似，可得

$$\mathbf{H}_1 = 4.0\mathbf{a}_x + 3.0\mathbf{a}_y - 6.0\mathbf{a}_z \quad (\text{A/m})$$

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0(12.0\mathbf{a}_x + 9.0\mathbf{a}_y - 18.0\mathbf{a}_z) \quad (\text{T})$$

$$\mathbf{B}_2 = \mu_0(12.0\mathbf{a}_x + 15.0\mathbf{a}_y - 30.0\mathbf{a}_z) \quad (\text{T})$$

$$\mathbf{H}_2 = 2.40\mathbf{a}_x + 3.0\mathbf{a}_y - 6.0\mathbf{a}_z \quad (\text{A/m})$$

于是 $$H_2 = \sqrt{(2.40)^2 + (3.0)^2 + (-6.0)^2} = 7.12 \text{ A/m}$$

$\mathbf{H}_2$ 与法向之间的夹角 α_2 为

$$\cos\alpha_2 = \frac{H_{x2}}{H_2} = 0.34 \qquad 或者 \qquad \alpha_2 = 70.3°$$

所以 $\theta_2 = 90° - \alpha_2 = 19.7°$。

13.3 $\mu_{r1} = 4$ 的区域 1 位于平面 $y + z = 1$ 包括原点的一侧（见图 13-5）。在区域 2 中，$\mu_{r2} = 6$。由 $\mathbf{B}_1 = 2.0\mathbf{a}_x + 1.0\mathbf{a}_y$(T)，求 $\mathbf{B}_2$ 和 $\mathbf{H}_2$。

解 选择单位法向矢量 $\mathbf{a}_n = (\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z)/\sqrt{2}$，则

$$B_{n1} = \frac{(2.0\mathbf{a}_x + 1.0\mathbf{a}_y)\cdot(\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\mathbf{B}_{n1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{a}_n = 0.5\mathbf{a}_y + 0.5\mathbf{a}_z = \mathbf{B}_{n2}$$

$$\mathbf{B}_{t1} = \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_{n1} = 2.0\mathbf{a}_x + 0.5\mathbf{a}_y - 0.5\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{H}_{t1} = \frac{1}{\mu_0}(0.5\mathbf{a}_x + 0.125\mathbf{a}_y - 0.125\mathbf{a}_z) = \mathbf{H}_{t2}$$

$$\mathbf{B}_{t2} = \mu_0\mu_{r2}\mathbf{H}_{t2} = 3.0\mathbf{a}_x + 0.75\mathbf{a}_y - 0.75\mathbf{a}_z$$

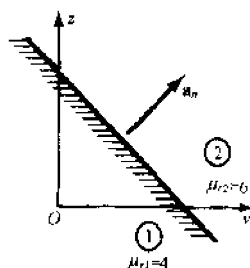


图 13-5

此时可由以上的法向分量和切向分量求出 $\mathbf{B}_2$：

$$\mathbf{B}_2 = 3.0\mathbf{a}_x + 1.25\mathbf{a}_y - 0.25\mathbf{a}_z \quad (\text{T})$$

进一步，得 $$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{\mu_0}(0.50\mathbf{a}_x + 0.21\mathbf{a}_y - 0.04\mathbf{a}_z) \quad (\text{A/m})$$

13.4 区域 1 定义为 $z<0$、$\mu_{r1} = 3$ 和

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{\mu_0}(0.2\mathbf{a}_x + 0.5\mathbf{a}_y + 1.0\mathbf{a}_z) \quad (\text{A/m})$$

已知 $\theta_2 = 45°$，求 $\mathbf{H}_2$。

解 $$\cos\alpha_1 = \frac{\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{a}_z}{|\mathbf{H}_1|} = 0.88 \quad 或 \quad \alpha_1 = 28.3°$$

于是，$\theta_1 = 61.7°$。而

$$\frac{\tan 61.7°}{\tan 45°} = \frac{\mu_{r2}}{3} \quad 或 \quad \mu_{r2} = 5.57$$

根据 $\mathbf{B}$ 的法向分量的连续性，可知 $\mu_{r1}H_{z1} = \mu_{r2}H_{z2}$，所以

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{\mu_0}\left(0.2\mathbf{a}_x + 0.5\mathbf{a}_y + \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}1.0\mathbf{a}_z\right) = \frac{1}{\mu_0}(0.2\mathbf{a}_x + 0.5\mathbf{a}_y + 0.54\mathbf{a}_z) \quad (\text{A/m})$$

13.5 在 $x=0$ 处的电流面 $\mathbf{K}=6.5\mathbf{a}_z$ A/m 把 $x<0$ 的区域 1 和 $x>0$ 的区域 2 分开，在区域 1 中，$\mathbf{H}_1=10\mathbf{a}_y$ A/m。求 $x=+0$ 处的 $\mathbf{H}_2$。

尽管两个区域中的磁导率未知，然而由于 $\mathbf{H}_1$ 完全是切向的，所以磁导率的变化对求解不会产生影响。由于 $B_{n1}=0, B_{n2}=0$，所以 $H_{n2}=0$。因

$$(\mathbf{H}_1-\mathbf{H}_2)\times\mathbf{a}_{n12}=\mathbf{K}$$
$$(10\mathbf{a}_y-H_{y2}\mathbf{a}_y)\times\mathbf{a}_x=6.5\mathbf{a}_z$$
$$(10-H_{y2})(-\mathbf{a}_z)=6.5\mathbf{a}_z$$
$$H_{y2}=16.5\ (\text{A/m})$$

所以，$\mathbf{H}_2=16.5\mathbf{a}_y$ (A/m)。

13.6 $\mathbf{K}=9.0\mathbf{a}_y$ A/m 的面电流位于 $z=0$ 处，它是 $z<0$、$\mu_{r1}=4$ 的区域 1 和 $z>0$、$\mu_{r2}=3$ 的区域 2 的分界面。已知 $\mathbf{H}_2=14.5\mathbf{a}_x+8.0\mathbf{a}_z$ (A/m)，求 $\mathbf{H}_1$。

如图 13-6 所示，首先单独考虑面电流在分界面两侧产生的场：

$$\mathbf{H}_1'=\frac{1}{2}(9.0)\mathbf{a}_y\times(-\mathbf{a}_z)=4.5(-\mathbf{a}_x)$$

$$\mathbf{H}_2'=\frac{1}{2}(9.0)\mathbf{a}_y\times\mathbf{a}_z=4.5\mathbf{a}_x$$

从区域 1 到区域 2，由于面电流的作用，H_x 将增加 9.0 A/m。

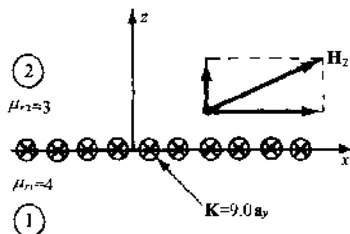


图 13-6

现在分析完整的场 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{B}$。

$$\mathbf{H}_2=14.5\mathbf{a}_x+8.0\mathbf{a}_z\quad(\text{A/m})$$
$$\mathbf{B}_2=\mu_0(43.5\mathbf{a}_x+24.0\mathbf{a}_z)\ (\text{T})$$
$$\mathbf{B}_1=\mu_0(22.0\mathbf{a}_x+24.0\mathbf{a}_z)\ (\text{T})$$
$$\mathbf{H}_1=5.5\mathbf{a}_x+6.0\mathbf{a}_z\quad(\text{A/m})$$

注意由于面电流的作用，H_{x1} 应比 H_{x2} 小 9.0 A/m。而 B_{z1} 可由 $B_{z1}=\mu_0\mu_{r1}H_{z1}$ 获得。

另一种方法是应用 $(\mathbf{H}_1-\mathbf{H}_2)\times\mathbf{a}_{n12}=\mathbf{K}$，得

$$(H_{x1}\mathbf{a}_x+H_{y1}\mathbf{a}_y+H_{z1}\mathbf{a}_z)\times\mathbf{a}_z=\mathbf{K}+(14.5\mathbf{a}_x+8.0\mathbf{a}_z)\times\mathbf{a}_z$$
$$-H_{x1}\mathbf{a}_y+H_{y1}\mathbf{a}_x=-5.5\mathbf{a}_y$$

根据上式，$H_{x1}=5.5$A/m，$H_{y1}=0$。这种方法只能处理 $\mathbf{H}$ 的切向分量，求解法向分量还需利用前一种方法。

13.7 $z<0$ 的区域 1 具有 $\mu_{r1}=1.5$，而 $z>0$ 的区域 2 具有 $\mu_{r2}=5$。在点(0,0,0)附近，有

$$\mathbf{B}_1=2.40\mathbf{a}_x+10.0\mathbf{a}_z\quad(\text{T}),\quad \mathbf{B}_2=25.75\mathbf{a}_x-17.7\mathbf{a}_y+10.0\mathbf{a}_z\quad(\text{T})$$

如果分界面上载有面电流，原点处的电流密度是多大？

在原点附近，有

$$\mathbf{H}_1=\frac{1}{\mu_0\mu_{r1}}\mathbf{B}_1=\frac{1}{\mu_0}(1.60\mathbf{a}_x+6.67\mathbf{a}_z)\ (\text{A/m})$$

$$\mathbf{H}_2=\frac{1}{\mu_0}(5.15\mathbf{a}_x-3.54\mathbf{a}_y+2.0\mathbf{a}_z)\ (\text{A/m})$$

于是 $\mathbf{K}$ 的局部值为

$$\mathbf{K}=(\mathbf{H}_1-\mathbf{H}_2)\times\mathbf{a}_{n12}=\frac{1}{\mu_0}(-3.55\mathbf{a}_x+3.54\mathbf{a}_y+4.67\mathbf{a}_z)\times\mathbf{a}_z$$
$$=\frac{5.0}{\mu_0}\left(\frac{\mathbf{a}_x-\mathbf{a}_y}{\sqrt{2}}\right)\quad(\text{A/m})$$

13.8 已知自由空间中 $\mathbf{E}=E_m\sin(\omega t-\beta z)\mathbf{a}_y$，求 $\mathbf{D}$、$\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{H}$，并画出 $t=0$ 时 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的草图。

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}=\varepsilon_0E_m\sin(\omega t-\beta z)\mathbf{a}_y$$

由麦克斯韦方程 $\nabla\times\mathbf{E}=-\partial\mathbf{B}/\partial t$，可得

$$\begin{vmatrix}\mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 0 & E_m\sin(\omega t-\beta z) & 0\end{vmatrix}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

或
$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \beta E_m \cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x$$
积分可得
$$\mathbf{B} = -\frac{\beta E_m}{\omega}\sin(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x$$
B随时间变化,积分常数忽略不计。于是
$$\mathbf{H} = -\frac{\beta E_m}{\omega\mu_0}\sin(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x$$
注意E和H是相互垂直的。当 $t=0$ 时,$\sin(\omega t - \beta z) = -\sin\beta z$。图13-7给出了沿 z 轴变化的两个场,假定 E_m 和 β 是正的。

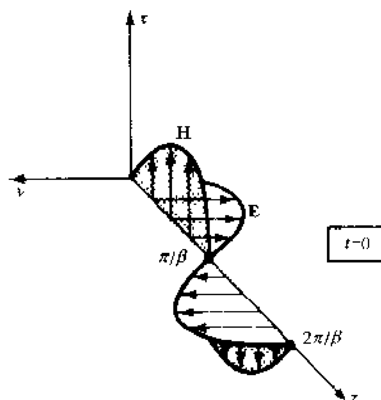


图 13-7

13.9 说明习题13.8中的场E和H构成了一个沿 z 方向传播的行波。验证波速和比值 E/H 由自由空间的性质决定。

 E和H同时按 $\sin(\omega t - \beta z)$ 变化,所以E和H在某个位置的某一时刻满足
$$\omega t - \beta z = \text{const.} = \omega t_0 \quad 或 \quad z = \frac{\omega}{\beta}(t - t_0)$$
这个平面方程的移动速度为
$$c = \frac{\omega}{\beta}$$
它向 $\mathbf{a}_z$ 方向移动。(假定 β 和 ω 是正的;对于负的 β,移动方向是 $-\mathbf{a}_z$。)因而,图13-7中的整个图形沿 z 轴以速度 c 移动。

由麦克斯韦方程 $\nabla \times \mathbf{H} = \partial \mathbf{D}/\partial t$,可得
$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\beta E_m}{\omega\mu_0}\sin(\omega t - \beta z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial t}\epsilon_0 E_m \sin(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_y$$
$$\frac{\beta^2 E_m}{\omega\mu_0}\cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_y = \epsilon_0 E_m \omega \cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_y$$
$$\frac{1}{\epsilon_0\mu_0} = \frac{\omega^2}{\beta^2}$$
因此
$$c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\frac{1}{(10^{-9}/36\pi)(4\pi\times 10^{-7})}} \approx 3\times 10^8(\text{m/s})$$
而且
$$\frac{E}{H} = \frac{\omega\mu_0}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 120\pi\ (\text{V/A}) = 120\pi\ \Omega$$

13.10 在自由空间中,已知 $\mathbf{H} = H_m e^{j(\omega t + \beta z)}\mathbf{a}_x$,求E。

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$
$$\frac{\partial}{\partial z}H_m e^{j(\omega t + \beta z)}\mathbf{a}_y = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$
$$j\beta H_m e^{j(\omega t + \beta z)}\mathbf{a}_y = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$
$$\mathbf{D} = \frac{\beta H_m}{\omega}e^{j(\omega t + \beta z)}\mathbf{a}_y$$
再利用 $\mathbf{E} = \mathbf{D}/\epsilon_0$,可求得E。

13.11 在自由空间中,已知
$$\mathbf{E} = 30\pi e^{j(10^8 t + \beta z)}\mathbf{a}_x(\text{V/m}), \qquad \mathbf{H} = H_m e^{j(10^8 t + \beta z)}\mathbf{a}_y(\text{A/m})$$
求 H_m 和 $\beta(\beta > 0)$。

解 这是平面波,求解方法与习题13.8和13.9基本一样(在那里,$\mathbf{E}$ 沿 y 方向,$\mathbf{H}$ 沿 x 方向)。习题13.9中的结论对自由空间中任意的这种波都成立,所以

$$\frac{\omega}{\beta}=\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}=3\times10^8\ \mathrm{m/s},\quad \frac{E}{H}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}=120\pi\ \Omega$$

因而,对于给定的波,有

$$\beta=\frac{10^8}{3\times10^8}=\frac{1}{3}(\mathrm{rad/m}),\quad H_m=\pm\frac{30\pi}{120\pi}=\pm\frac{1}{4}(\mathrm{A/m})$$

为了确定 H_m 的符号,应用 $\nabla\times\mathbf{E}=-\partial\mathbf{B}/\partial t$,得

$$j\beta30\pi e^{j(10^8t+\beta z)}\mathbf{a}_y=-j10^8\mu_0H_me^{j(10^8t+\beta z)}\mathbf{a}_y$$

上式表明 H_m 必须是负的。

13.12 在均匀非导电的区域中,$\mu_r=1$,如果

$$\mathbf{E}=30\pi e^{j[\omega t-(4/3)y]}\mathbf{a}_z(\mathrm{V/m}),\qquad \mathbf{H}=1.0e^{j[\omega t-(4/3)y]}\mathbf{a}_x(\mathrm{A/m})$$

求 ϵ_r 和 ω。

解 通过与习题13.9的类比,可得

$$\frac{\omega}{\beta}=\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}=\frac{3\times10^8}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}}\ \mathrm{m/s},\quad \frac{E}{H}=\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}=120\pi\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}\ \Omega$$

将 $\mu_r=1$ 代入,得

$$\frac{\omega}{\frac{4}{3}}=\frac{3\times10^8}{\sqrt{\epsilon_r}},\quad 30\pi=120\pi\frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

由以上两式得到 $\epsilon_r=16$ 和 $\omega=10^8$ rad/s。在这种介质中,光的速度为 $c/4$。

补 充 习 题

13.13 平面 $6x+4y+3z=12$ 包括原点的一侧是区域1,其中 $\mu_{r1}=5$;区域2中,$\mu_{r2}=3$。已知

$$\mathbf{H}_1=\frac{1}{\mu_0}(3.0\mathbf{a}_x-0.5\mathbf{a}_y)\ (\mathrm{A/m})$$

求 $\mathbf{B}_2$ 和 θ_2。

答案:$12.15\mathbf{a}_x+0.60\mathbf{a}_y+1.58\mathbf{a}_z$(T), 56.6°

13.14 两个不同区域的分界面与三个笛卡儿坐标轴中的一个垂直。如果

$$\mathbf{B}_1=\mu_0(43.5\mathbf{a}_x+24.0\mathbf{a}_z),\quad \mathbf{B}_2=\mu_0(22.0\mathbf{a}_x+24.0\mathbf{a}_z)$$

比值$(\tan\theta_1)/(\tan\theta_2)$是多大?

答案:0.506

13.15 在直圆柱内部,$\mu_r=1000$,外部是自由空间。如果在圆柱内部,$\mathbf{B}_1=2.5\ \mathbf{a}_\phi$ T,试确定外部的 $\mathbf{B}_2$。

答案:$2.5\ \mathbf{a}_\phi$(mT)

13.16 在球坐标系中,区域1是 $r<a$,区域2是 $a<r<b$,区域3是 $r>b$。区域1和3是自由空间,而且 $\mu_{r2}=500$。已知 $\mathbf{B}_1=0.20\ \mathbf{a}_r$(T),求每个区域中的 $\mathbf{H}$。

答案:$\frac{0.20}{\mu_0}$ (A/m), $\frac{4\times10^{-4}}{\mu_0}$ (A/m), $\frac{0.20}{\mu_0}$ (A/m)

13.17 在 $x=0$ 处,$\mathbf{K}=(8.0/\mu_0)\mathbf{a}_y$(A/m)的面电流把 $x<0$ 且 $\mu_{r1}=3$ 的区域1和 $x>0$ 且 $\mu_{r2}=1$ 的区域2分开。已知 $\mathbf{H}_1=(10.0/\mu_0)(\mathbf{a}_y+\mathbf{a}_z)$ (A/m),求 $\mathbf{H}_2$。

答案:$\frac{1}{\mu_0}(10.0\mathbf{a}_y+2.0\mathbf{a}_z)$ (A/m)

13.18 平面 $x=0$ 含有密度为 $\mathbf{K}$ 的面电流,它把 $x<0$ 且 $\mu_{r1}=2$ 的区域1和 $x>0$ 且 $\mu_{r2}=7$ 的区域2分开。已知

$$\mathbf{B}_1=6.0\mathbf{a}_x+4.0\mathbf{a}_y+10.0\mathbf{a}_z(\mathrm{T}),\quad \mathbf{B}_2=6.0\mathbf{a}_x-50.96\mathbf{a}_y+8.96\mathbf{a}_z(\mathrm{T})$$

求 $\mathbf{K}$。

答案：$\frac{1}{\mu_0}(3.72\mathbf{a}_x - 9.28\mathbf{a}_y)$ (A/m)

13.19　在自由空间中，$\mathbf{D} = D_m \sin(\omega t + \beta z)\mathbf{a}_x$。利用麦克斯韦方程组验证：

$$\mathbf{B} = \frac{-\omega\mu_0 D_m}{\beta}\sin(\omega t + \beta z)\mathbf{a}_y$$

沿 z 轴画出 $t=0$ 时场的草图，假定 $D_m > 0$，$\beta > 0$。

答案：见图 13-8

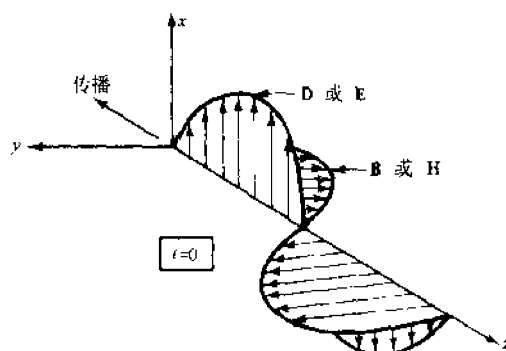


图 13-8

13.20　在自由空间中，有

$$\mathbf{B} = B_m e^{j(\omega t + \beta z)}\mathbf{a}_y$$

验证 $\mathbf{E} = -\frac{\omega B_m}{\beta}e^{j(\omega t + \beta z)}\mathbf{a}_x$。

13.21　在 $\mu_r = 1$ 和 $\epsilon_r = 50$ 的均匀区域中，有

$$\mathbf{E} = 20\pi e^{j(\omega t - \beta z)}\mathbf{a}_x\ (\text{V/m}),\quad \mathbf{B} = \mu_0 H_m e^{j(\omega t - \beta z)}\mathbf{a}_y\ (\text{T})$$

如果波长为 1.78m，求 ω 和 H_m。

答案：1.5×10^8 rad/s，　1.18 A/m

第 14 章 电磁波

14.1 引言

在第 13 章的习题中，已经遇到过麦克斯韦方程组的一些波解。本章将进一步研究电磁波。因为大多数感兴趣的区域内无电荷分布，所以可假设电荷密度为 $\rho=0$。此外，若假设介质是线性和各向同性的，则有 $\mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E}, \mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$。

14.2 波动方程

由引言中的假设可知，若 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的时谐因子为 $e^{j\omega t}$，则麦克斯韦方程组(表 13-1)可写为

$$\nabla\times\mathbf{H}=(\sigma+j\omega\epsilon)\mathbf{E} \tag{1}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-j\omega\mu\mathbf{H} \tag{2}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=0 \tag{3}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{H}=0 \tag{4}$$

对方程(1)和(2)取旋度：

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{H})=(\sigma+j\omega\epsilon)\nabla\times\mathbf{E})$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E})=-j\omega\mu(\nabla\times\mathbf{H})$$

注意：只有在笛卡儿坐标系中，矢量的拉普拉斯算子才能表示如下：

$$\nabla^2\mathbf{A}\equiv(\nabla^2A_x)\mathbf{a}_x+(\nabla^2A_y)\mathbf{a}_y+(\nabla^2A_z)\mathbf{a}_z$$

利用恒等式

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}$$

代替“旋度的旋度”，则由式(3)和(4)可得出**矢量波动方程**

$$\nabla^2\mathbf{H}=j\omega\mu(\sigma+j\omega\epsilon)\mathbf{H}\equiv\gamma^2\mathbf{H}$$

$$\nabla^2\mathbf{E}=j\omega\mu(\sigma+j\omega\epsilon)\mathbf{E}\equiv\gamma^2\mathbf{E}$$

传播常数 γ 是 γ^2 的平方根，取它的实部和虚部都为正：

$$\gamma=\alpha+j\beta$$

其中

$$\alpha=\omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2}-1\right)} \tag{5}$$

$$\beta=\omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2}+1\right)} \tag{6}$$

14.3 在笛卡儿坐标系中波动方程的解

我们知道，一维标量波动方程

$$\frac{\partial^2F}{\partial z^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2F}{\partial t^2}$$

的解形式为 $F=f(z-ut)$ 和 $F=g(z+ut)$，其中 f 和 g 是任意函数。这两个解分别代表以速度 u 沿 $+z$ 和 $-z$ 方向传播的波。图 14-1 表示第一个波解在 $t=0$ 和 $t=t_1$ 时的位置；波在时间 t_1 内沿 $+z$ 方向前进的距离为 ut_1。由解的特殊形式

$$f(x)=Ce^{-j\omega x/u} \quad 和 \quad g(x)=De^{+j\omega x/u}$$

可得出角频率为 ω 的时谐波：

$$F=Ce^{j(\omega t-\beta z)} \quad 和 \quad F=Ce^{j(\omega t+\beta z)}$$

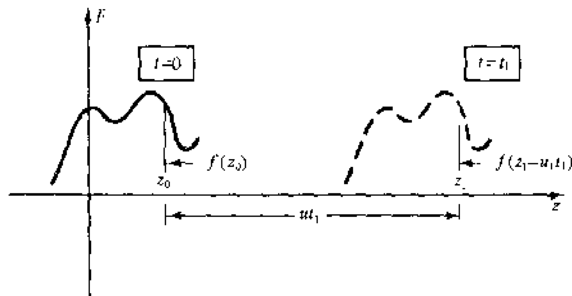


图 14-1

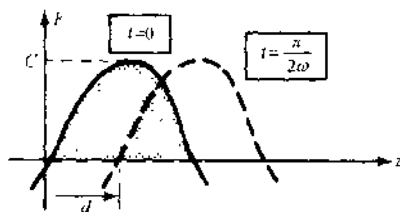


图 14-2

式中 $\beta\equiv\omega/u$。当然，解的实部和虚部也是波动方程的解。图 14-2 表示其中一个解 $F=C\sin(\omega t-\beta z)$在 $t=0$ 和 $t=\pi/2\omega$ 时的位置。在这段时间内，波沿 z 的正方向前进的距离为 $d=u(\pi/2\omega)=\pi/2\beta$。对于任一固定时刻 t，当 z 改变 $2\pi/\beta$ 时解的波形都相同；距离

$$\lambda\equiv\frac{2\pi}{\beta}$$

称为**波长**。波长和**频率** $f\equiv\omega/2\pi$ 的关系为

$$\lambda f=u \quad 或 \quad \lambda=Tu$$

其中 $T\equiv1/f=2\pi/\omega$ 是时谐波的**周期**。

14.2 节中的矢量波动方程的解与前面讨论的解相似。由于在笛卡儿坐标系中，单位矢量 $\mathbf{a}_x$、$\mathbf{a}_y$、$\mathbf{a}_z$ 有确定的方向，所以 $\mathbf{H}$ 的波动方程可写为

$$\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial z^2}=\gamma^2\mathbf{H}$$

若方程的解仅与一个空间坐标有关(平面波)，例如与 z 有关，则方程转变为

$$\frac{d^2\mathbf{H}}{dz^2}=\gamma^2\mathbf{H}$$

当时谐因子为 $e^{j\omega t}$时，该式可变换成一维标量波动方程。对于传播常数 γ，方程对应的解为

$$\mathbf{H}(z,t)=H_0e^{\pm\gamma z}e^{j\omega t}\mathbf{a}_H$$

相应地，电场的解为

$$\mathbf{E}(z,t)=E_0e^{\pm\gamma z}e^{j\omega t}\mathbf{a}_E$$

单位矢量 $\mathbf{a}_H$ 和 $\mathbf{a}_E$ 是正交的，且场量 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 在传播方向上都没有分量。既然如此，我们可以旋转坐标，使其中一个场量(如 $\mathbf{E}$)与 x 轴重合，那么由麦克斯韦方程(2)可知，当传播方向在 $\mp z$ 方向上时 $\mathbf{H}$ 将位于 $\pm y$ 轴上。

例 1 已知电场为 $\mathbf{E}=E_0e^{-\gamma z}\mathbf{a}_E$(省略时谐因子)，验证 $\mathbf{E}$ 在传播方向 $+\mathbf{a}_z$ 上没有分量。

解 由投影定理可求出 $\mathbf{a}_E$ 的笛卡儿分量：

$$\mathbf{E}=E_0e^{-\gamma z}[(\mathbf{a}_E\cdot\mathbf{a}_x)\mathbf{a}_x+(\mathbf{a}_E\cdot\mathbf{a}_y)\mathbf{a}_y+(\mathbf{a}_E\cdot\mathbf{a}_z)\mathbf{a}_z]$$

因 $\nabla\cdot\mathbf{E}=0$，所以

$$\frac{\partial}{\partial z}E_0e^{-\gamma z}(\mathbf{a}_E\cdot\mathbf{a}_z)=0$$

只有当 $\mathbf{a}_E\cdot\mathbf{a}_z=0$ 时上式成立。因此 $\mathbf{E}$ 没有 $\mathbf{a}_z$ 分量。

由上面导出的平面波解取决于介质的参数 μ、ϵ 和 σ，因为这些参数包含在传播常数 γ 中。

14.4 弱导电介质中波动方程的解

对于弱导电介质区域(例如湿地、海水)，$\mathbf{E}$ 的波动方程的解可取为

$$\mathbf{E}=E_0e^{-\gamma z}\mathbf{a}_x$$

则由 14.2 节中式(2)可得

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\sigma + j\omega\varepsilon}{j\omega\mu}}E_0 e^{-\gamma z}\mathbf{a}_y$$

比值 E/H 由表征介质的参数(与频率有关)所决定。更确切地说,对于沿 $+z$ 方向传播的波 $\mathbf{E}=E_x\mathbf{a}_x$ 和 $\mathbf{H}=H_y\mathbf{a}_y$,介质的**本征阻抗** η 定义为

$$\eta = \frac{E_x}{H_y}$$

因此

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$$

对应的平方根也可写成极角形式 $|\eta|\underline{/\theta}$,其中

$$|\eta| = \frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{\sqrt[4]{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}},\quad \tan 2\theta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\quad 和\quad 0^\circ < \theta < 45^\circ$$

(如果波沿 $-z$ 方向传播,则 $E_x/H_y=-\eta$。实际上,在以上各式中,用 $-\gamma$ 代替 γ,由另一个平方根可得出相应的结论)。

利用时谐因子 $e^{j\omega t}$,并把 γ 写成 $\gamma=\alpha+j\beta$,可得出弱导电区域内场量的表达式:

$$\mathbf{E}(z,t) = E_0 e^{-\alpha z}e^{j(\omega t-\beta z)}\mathbf{a}_x,\qquad \mathbf{H}(z,t) = \frac{E_0}{|\eta|}e^{-\alpha z}e^{j(\omega t-\beta z-\theta)}\mathbf{a}_y$$

当 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 沿 $+z$ 方向传播时,因子 $e^{-\alpha z}$ 对它们的幅值起衰减作用。由 14.2 节式(5)关于 α 的表达式可见,只有电导率 σ 为零,即理想介质或真空的情况下,振幅才不会衰减。同样只有当 $\sigma=0$ 时,$\mathbf{E}(z,t)$ 和 $\mathbf{H}(z,t)$ 之间才不会有相位差 θ。

波速为

$$u = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1\right)}}$$

若已知波速,由 $\lambda f=u$ 可求出波长 λ。与真空或理想介质中波速和波长相比,在导电介质中因项 $(\sigma/\omega\varepsilon)^2$ 的存在而使波速和波长都减少。当介质具有**色散**特性时,不同频率的波有不同的波速 u。

14.5 理想介质中波动方程的解

对于理想介质,$\sigma=0$,则有

$$\alpha = 0,\quad \beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon},\quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\underline{/0^\circ}$$

$\alpha=0$ 表明波 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 都没有衰减。因为 η 的幅角为零,所以在任一固定位置上 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的相位都相同。假设 $\mathbf{E}$ 为 $\mathbf{a}_x$ 方向并沿 $\mathbf{a}_z$ 方向传播,由 14.4 节中的解可得出场量的极限形式:

$$\mathbf{E}(z,t) = E_0 e^{j(\omega t-\beta z)}\mathbf{a}_x,\qquad \mathbf{H}(z,t) = \frac{E_0}{\eta}e^{j(\omega t-\beta z)}\mathbf{a}_y$$

波速和波长分别是

$$u = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}},\qquad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

在真空中仅有理想介质,所以

$$\mu = \mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{H/m},\qquad \varepsilon = \varepsilon_0 = 8.854\times10^{-12}\ \mathrm{F/m}\approx\frac{10^{-9}}{36\pi}\ \mathrm{F/m}$$

$$\eta = \eta_0 \approx 120\pi\ \Omega,\qquad u = c\approx 3\times10^8\ \mathrm{m/s}$$

14.6 良导体中波动方程的解　透入深度

在实际应用的频率范围内,如果 $\sigma\gg\omega\varepsilon$,则认为材料是良导体。此时,传播常数和本征阻

抗分别为

$$\gamma = \alpha + j\beta, \qquad \alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\pi f\mu\sigma}, \qquad \eta = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}\angle 45^\circ$$

可见对于所有良导体，波 **E** 和 **H** 都是衰减的。以下几个例题将会表明，波 **E** 和 **H** 衰减得很快。α 总是等于β，在任一固定位置上 **H** 的相位比 **E** 的相位滞后 45°或$\pi/4$ 弧度。若再次假设 **E** 指向 $\mathbf{a}_x$ 方向并沿 $\mathbf{a}_z$ 方向传播，则由 14.4 节可知场量的表达式为

$$\mathbf{E}(z,t) = E_0 e^{-\alpha z} e^{j(\omega t-\beta z)}\mathbf{a}_x, \qquad \mathbf{H}(z,t) = \frac{E_0}{|\eta|} e^{-\alpha z} e^{j(\omega t-\beta z-\pi/4)}\mathbf{a}_y$$

且

$$u = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} = \omega\delta, \qquad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}} = 2\pi\delta$$

这里把波速和波长都用**透入深度** δ 或**穿透深度** δ 来表示，其中

$$\delta \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}}$$

例2 如图 14-3 所示，假设在区域 $z>0$ 内的铜导体的表面上有电场 $\mathbf{E}(z,t) = 1.0e^{-\alpha z}e^{j(\omega t-\beta z)}\mathbf{a}_x$ (V/m)，其中 $f=\omega/2\pi = 100\text{MHz}$，铜的电导率为 $\sigma = 58\text{MS/m}$。分析波在导体内传播时的衰减情况。

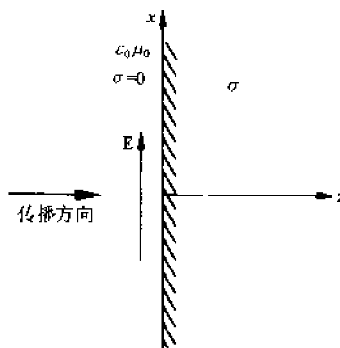


图 14-3

解 在深度 z 处，电场的幅值为

$$|\mathbf{E}| = 1.0e^{-\alpha z} = 1.0e^{-z/\delta}$$

其中

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}} = 6.61\ \mu\text{m}$$

因此，波传播 6.61μm 后，场的幅值衰减到初始值的 $e^{-1} = 36.8\%$。在 5δ 或 33μm 处，场的幅值仅是初始值的 0.67%，实际上已接近于零。

14.7 垂直入射时的分界面条件

当行波到达两个不同区域的分界面时，一部分波被反射回来，另一部分波透射进去，两部分波的幅值由两个区域的传播常数决定。在图 14-4 中，行波 **E** 从 $z<0$ 的区域 1 内传播到 $z=0$ 的分界面上。在 $z=-0$ 处有 $\mathbf{E}^i$ 和 $\mathbf{E}^r$，在 $z=+0$（区域 2 内）处有 $\mathbf{E}^t$。这里上标 i 表示"入射"，r 表示"反射"，t 表示"透射"。假设行波是垂直入射的，则 **E** 和 **H** 的方程可写成

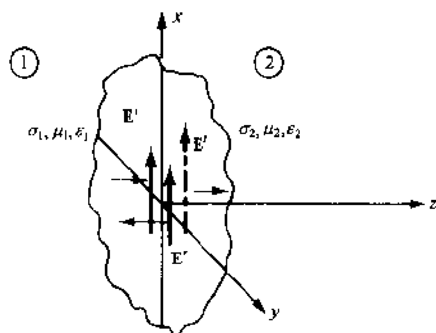


图 14-4

$$\mathbf{E}^i(z,t) = E_0^i e^{-\gamma_1 z}e^{j\omega t}\mathbf{a}_x$$
$$\mathbf{E}^r(z,t) = E_0^r e^{\gamma_1 z}e^{j\omega t}\mathbf{a}_x$$
$$\mathbf{E}^t(z,t) = E_0^t e^{-\gamma_2 z}e^{j\omega t}\mathbf{a}_x$$
$$\mathbf{H}^i(z,t) = H_0^i e^{-\gamma_1 z}e^{j\omega t}\mathbf{a}_y$$
$$\mathbf{H}^r(z,t) = H_0^r e^{\gamma_1 z}e^{j\omega t}\mathbf{a}_y$$
$$\mathbf{H}^t(z,t) = H_0^t e^{-\gamma_2 z}e^{j\omega t}\mathbf{a}_y$$

把六个常数中的一个作为实数——一般选取 E_0^i 为实数。利用边界条件可证明，其余五个常数中的一个或多个是复数。

对于以上给定的入射波，矢量 **E** 和 **H** 与分界面是相切的，因此在穿过分界面时，**E** 和 **H** 是连续的。这意味着在 $z=0$ 处，有

$$E_0^i + E_0^r = E_0^t, \qquad H_0^i + H_0^r = H_0^t$$

而且，在任何一个区域内本征阻抗都等于 $\pm E_x/H_y$（见 14.4 节），即

$$\frac{E_0^i}{H_0^i}=\eta_1,\quad \frac{E_0^r}{H_0^r}=-\eta_1,\quad \frac{E_0^t}{H_0^t}=\eta_2$$

综合以上五个方程，可得到以下由本征阻抗表示的比值：

$$\frac{E_0^r}{E_0^i}=\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_1+\eta_2},\qquad \frac{H_0^r}{H_0^i}=\frac{\eta_1-\eta_2}{\eta_1+\eta_2}$$

$$\frac{E_0^t}{E_0^i}=\frac{2\eta_2}{\eta_1+\eta_2},\qquad \frac{H_0^t}{H_0^i}=\frac{2\eta_1}{\eta_1+\eta_2}$$

前面已经分析了各种不同介质的本征阻抗，这里重新列出，以供参考。

弱导电介质：　　$\eta=\sqrt{\dfrac{j\omega\mu}{\sigma+j\omega\varepsilon}}$

导电介质：　　$\eta=\sqrt{\dfrac{\omega\mu}{\sigma}}\angle 45^\circ$

理想介质：　　$\eta=\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$

真空：　　$\eta_0=\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\approx 120\pi\ \Omega$

例 3　真空(区域 1)中的行波 **E** 和 **H** 垂直入射到 $\varepsilon_r=3.0$ 的理想介质(区域 2)上。比较分界面上入射波、反射波和透射波的幅值。

解

$$\eta_1=\eta_0=120\pi\ \Omega,\qquad \eta_2=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=\frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}}=217.7\ \Omega$$

$$\frac{E_0^r}{E_0^i}=\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_1+\eta_2}=-0.268,\qquad \frac{H_0^r}{H_0^i}=\frac{\eta_1-\eta_2}{\eta_1+\eta_2}=0.268$$

$$\frac{E_0^t}{E_0^i}=\frac{2\eta_2}{\eta_1+\eta_2}=0.732,\qquad \frac{H_0^t}{H_0^i}=\frac{2\eta_1}{\eta_1+\eta_2}=1.268$$

14.8　斜入射和斯涅耳定律

当入射波传播到两种不同介质的交界面时，一般将会在第二种介质内产生透射波，在第一种介质内产生反射波。**入射平面**是由入射波的入射方向和分界面的法线所构成的平面，在图 14-5 中，入射平面是平面 xoz。反射波的方向和透射波的方向也都在入射平面内。图 14-5 中所定义的**入射角** θ_i、**反射角** θ_r 和**透射角** θ_t，它们遵守**斯涅耳反射定律** $\theta_i=\theta_r$ 和**斯涅耳折射定律**

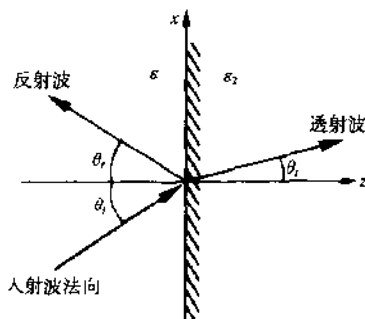


图 14-5

$$\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i}=\sqrt{\frac{\mu_2\varepsilon_2}{\mu_1\varepsilon_1}}$$

例 4　波以 30°的入射角从空气中入射到 $\varepsilon_r=2.1$ 的聚四氟乙烯中。先计算透射角，然后调换区域后重新计算透射角。

解　因为 $\mu_1=\mu_2$，所以

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t}=\frac{\sin 30^\circ}{\sin\theta_t}=\sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}=\sqrt{2.1}\quad 或\quad \theta_t=20.18^\circ$$

由聚四氟乙烯入射到空气中时，有

$$\frac{\sin 30^\circ}{\sin\theta_t}=\frac{1}{\sqrt{2.1}}\quad 或\quad \theta_t=46.43^\circ$$

假设两种介质的磁导率相同，波由光密介质传播到光疏介质($\varepsilon_1>\varepsilon_2$)中，则有 $\theta_t>\theta_i$。当 θ_i 增加时，可得到一个使 $\theta_t=90^\circ$的入射角。当入射角等于**临界角**时，波不会透射到第二种介质内，而是沿介质的分界面传播。临界角为

$$\theta_c = \sin^{-1}\sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}}$$

例5 波由聚四氟乙烯传播到空气中的临界角为

$$\theta_c = \sin^{-1}\sqrt{\frac{1}{2.1}} = 43.64^\circ$$

14.9 垂直极化

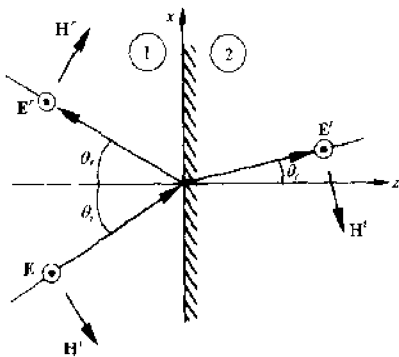


图 14-6

电场 **E** 相对于入射面的方向决定了在两种不同区域的交界面上波的**极化**。在**垂直**极化中,**E** 是垂直于入射面(图 14-6 中平面 xoz)入射的,因此 **E** 的方向平行于二维的分界面。在分界面上,有

$$\frac{E_0^r}{E_0^i} = \frac{\eta_2\cos\theta_i - \eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t}$$

$$\frac{E_0^t}{E_0^i} = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t}$$

应该注意,当垂直入射时,$\theta_i = \theta_t = 0^\circ$,以上表达式简化为 14.7 节中的公式。

显然,若 $\mu_1 = \mu_2$,对于任意角 θ_i,当

$$\eta_2\cos\theta_i - \eta_1\cos\theta_t \neq 0$$

时,垂直极化入射波将产生部分反射或全反射。

14.10 水平极化

对于水平极化,电场矢量 **E** 完全在入射面内,即如图 14-7 所示的 xoz 平面。因此,**E** 相当于垂直极化中的 **H**。在交界面上,有

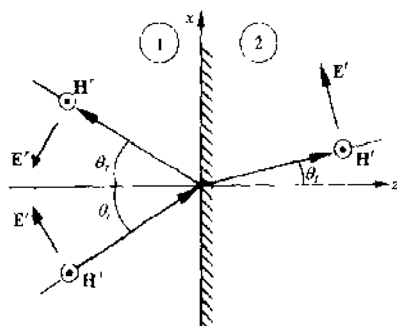


图 14-7

$$\frac{E_0^r}{E_0^i} = \frac{\eta_2\cos\theta_t - \eta_1\cos\theta_i}{\eta_1\cos\theta_i + \eta_2\cos\theta_t},\qquad \frac{E_0^t}{E_0^i} = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_1\cos\theta_i + \eta_2\cos\theta_t}$$

与垂直极化相比,当 $\mu_1 = \mu_2$ 时,存在一个特殊的入射角,使所对应的反射波为零。这个角称为**布儒斯特角**,大小为

$$\theta_B = \tan^{-1}\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

例6 水平极化波由空气中传播到 $\epsilon_r = 5.0$ 的玻璃中时,布儒斯特角为

$$\theta_B = \tan^{-1}\sqrt{5.0} = 65.91^\circ$$

14.11 驻波

当在理想介质($\sigma_1 = 0$, $\alpha_1 = 0$)中传播的波垂直入射到与理想导体($\sigma_2 = \infty$, $\eta_2 = 0$)的交界面时,反射波和入射波叠加便产生**驻波**。驻波可以通过拉紧的细绳来演示,驻波上相隔半个波长的所有点的振动相位相同。入射波和反射波的合成可写为

$$\mathbf{E}(z,t) = [E_0^i e^{j(\omega t-\beta z)} + E_0^r e^{j(\omega t+\beta z)}]\mathbf{a}_x = e^{j\omega t}(E_0^i e^{-j\beta z} + E_0^r e^{j\beta z})\mathbf{a}_x$$

因为 $\eta_2 = 0$,所以 $E_0^r/E_0^i = -1$ 和

$$\mathbf{E}(z,t) = e^{j\omega t}(E_0^i e^{-j\beta z} + E_0^r e^{j\beta z})\mathbf{a}_x = -2jE_0^i\sin\beta z\, e^{j\omega t}\,\mathbf{a}_x$$

取实部,有

$$\mathbf{E}(z,t) = 2E_0^i\sin\beta z\sin\omega t\ \mathbf{a}_x$$

图 14-8 表示时间间隔为 $T/8$ 的驻波，其中周期 $T=2\pi/\omega$。当 $t=0$ 时，对于所有点，$\mathbf{E}=0$；当 $t=1(T/8)$时，矢量 $\mathbf{E}$ 的终点在正弦曲线 1 上；当 $t=2(T/8)$时，$\mathbf{E}$ 的终点在正弦曲线 2 上，等等。正弦曲线 2 和 6 形成了振动的包络线；包络线的振幅是入射波振幅的两倍。需要指出，相邻半波段间的相位差是 180°。

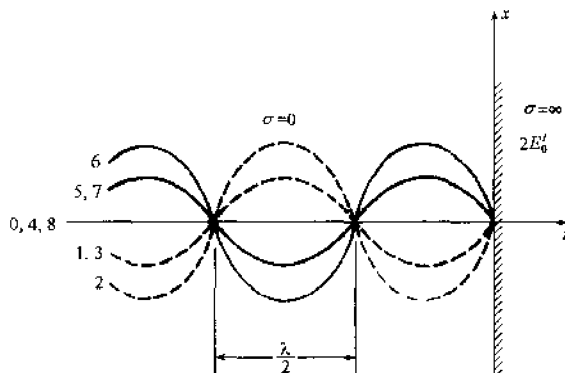


图 14-8

14.12　功和坡印廷矢量

对电导率为 σ 的区域，写出麦克斯韦方程组中的第一个方程和用 $\mathbf{E}$ 点乘该方程的各项，有

$$\nabla\times\mathbf{H}=\sigma\mathbf{E}+\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{H})=\sigma E^2+\mathbf{E}\cdot\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

式中 $E^2=\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}$。用矢量恒等式$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A})-\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$，变换方程式的左边，可得

$$\mathbf{H}\cdot(\nabla\times\mathbf{E})-\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\sigma E^2+\mathbf{E}\cdot\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

由麦克斯韦方程组中的第二个方程，得

$$\mathbf{H}\cdot(\nabla\times\mathbf{E})=\mathbf{H}\cdot\left(-\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\right)=-\frac{\mu}{2}\frac{\partial H^2}{\partial t}$$

同样可得

$$\mathbf{E}\cdot\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t}$$

所以

$$\sigma E^2=-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t}-\frac{\mu}{2}\frac{\partial H^2}{\partial t}-\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$$

在任意体积 v 内对上式积分，可得

$$\int_v\sigma E^2dv=-\int_v\left(\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t}+\frac{\mu}{2}\frac{\partial H^2}{\partial t}\right)dv-\oint_S(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{S}$$

其中最后一项应用了散度定理把体积分变成了面积分。

上式左边积分项的单位是 W，代表单位时间内以热能形式消耗能量的欧姆项。消耗的能量在等式右边的积分项中体现了它的来源。因为 $\varepsilon E^2/2$ 和 $\mu H^2/2$ 分别是储存在电场和磁场中的能量密度，所以体积分项（包括负号在内）表示这种储存能量的减少。因此，面积分项（包括负号在内）必定是从外界流入该体积的能量速率。若改变它的符号，则表示**流出该体积的能量的瞬时速率**：

$$P(t)=\oint_S(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{S}=\oint_S\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$$

式中 $\mathbf{A}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ 是**坡印廷矢量**，表示某点单位面积的能流的瞬时速率。

在定义坡印廷矢量的叉乘中，场量都是实数形式。相反，如果 **E** 和 **H** 是复数形式，并有相同的时谐因子 $e^{j\omega t}$，那么 **A** 的时间平均值为

$$\mathbf{A}_{avg} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*)$$

其中 $\mathbf{H}^*$ 是 **H** 的共轭复数。这是仿效电路分析中**复功率** $S=\frac{1}{2}VI^*$ 的形式写出的，复功率的实部为功率 $P=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,(VI^*)$。

对于平面波，能流的方向是波的传播方向。因此坡印廷矢量提供了一种确定波的传播方向或者已知波的传播方向确定场的方向的方法，这种方法既有效又与坐标系无关，尤其在分入射波、透射波和反射波时，这种方法就更有效。

习 题 求 解

14.1 行波由式 $y=10\sin(\beta z-\omega t)$ 描述。如果波速为 3×10^8m/s，角频率为 $\omega=10^6$rad/s，当波用时间 t_1 前进 $\lambda/8$ 时，画出在 $t=0$ 和 $t=t_1$ 时的波形。若 $\omega=2\times10^6$rad/s，时间 t_1 不变，重新画出波形。

在一个周期 $T=2\pi/\omega$ 内，波前进 λ。因此

$$t_1 = \frac{T}{8} = \frac{\pi}{4\omega}$$

$$\frac{\lambda}{8} = ct_1 = (3\times10^8)\frac{\pi}{4(10^6)} = 236\text{ m}$$

在图 14-9(a)中分别画出了在 $t=0$ 和 $t=t_1$ 时的波。当频率增加一倍时，波长 λ 是前者的一半，相移常数 β 是前者的两倍，见图 14-9(b)。在 t_1 时刻波向前移动了 236m，但现在为 $\lambda/4$。

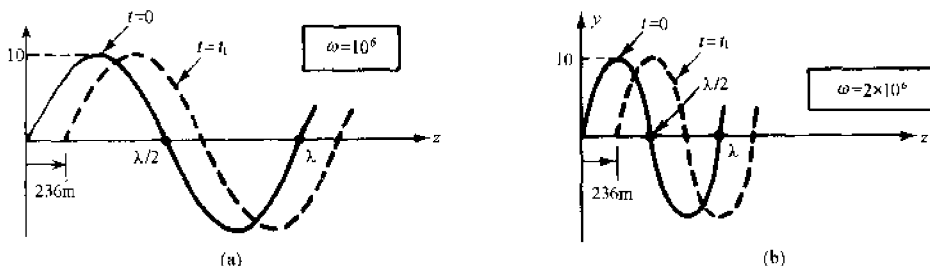


图 14-9

14.2 在真空中，$\mathbf{E}(z,t)=10^3\sin(\omega t-\beta z)\mathbf{a}_y$(V/m)。求 $\mathbf{H}(z,t)$。

分析相位 $\omega t-\beta z$ 可知，波的传播方向为 $+z$ 方向。因为 $\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ 的方向必定也是 $+z$ 方向，所以 **H** 的方向应是 $-\mathbf{a}_x$，因此

$$\frac{E_y}{H_x} = \eta_0 = 120\pi \quad 或 \quad H_x = -\frac{10^3}{120\pi}\sin(\omega t-\beta z)\ (\text{A/m})$$

故

$$\mathbf{H}(z,t) = -\frac{10^3}{120\pi}\sin(\omega t-\beta z)\mathbf{a}_x\,(\text{A/m})$$

14.3 已知频率 $f=95.5$MHz，对于习题 14.2 中的波，求传播常数 γ。

一般情况下，$\gamma=\sqrt{j\omega\mu(\sigma+j\omega\varepsilon)}$。在真空中，$\sigma=0$，所以

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = j\left(\frac{2\pi f}{c}\right) = j\frac{2\pi(95.5\times10^6)}{3\times10^8} = j(2.0)\text{ m}^{-1}$$

这个结果表明衰减因子 $\alpha=0$ 和相移常数 $\beta=2.0$rad/m。

14.4 当 $\omega t=0,\pi/4,\pi/2,3\pi/4$ 和 π 时，分析平面 $z=0$ 上的场

$$\mathbf{E}(z,t) = 10\sin(\omega t+\beta z)\mathbf{a}_x + 10\cos(\omega t+\beta z)\mathbf{a}_y$$

解 在表 14-1 中给出了计算结果。

表 14-1

ωt	$E_x = 10\sin\omega t$	$E_y = 10\cos\omega t$	$\mathbf{E} = E_x\mathbf{a}_x + E_y\mathbf{a}_y$
0	0	10	$10\mathbf{a}_y$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{10}{\sqrt{2}}$	$\frac{10}{\sqrt{2}}$	$10\left(\frac{\mathbf{a}_x+\mathbf{a}_y}{\sqrt{2}}\right)$
$\frac{\pi}{2}$	10	0	$10\mathbf{a}_x$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{10}{\sqrt{2}}$	$\frac{-10}{\sqrt{2}}$	$10\left(\frac{\mathbf{a}_x+\mathbf{a}_y}{\sqrt{2}}\right)$
π	0	-10	$10(-\mathbf{a}_y)$

如图 14-10 所示，$\mathbf{E}(x,t)$是圆极化波。另外，波是沿 $-\mathbf{a}_z$ 方向传播的。

14.5 在真空中，场 **H** 沿 $-\mathbf{a}_z$ 方向传播，相移常数为 30.0rad/m，振幅为 $\pi/3$。如果当 $t=0$ 和 $z=0$时场 **H** 的方向为 $-\mathbf{a}_y$，写出 **E** 和 **H** 的表达式，并确定频率和波长。

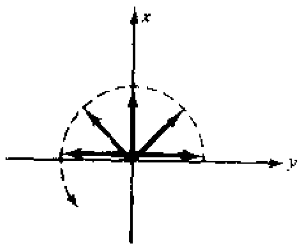


图 14-10

解 在电导率为 σ 的介质中，本征阻抗 η 是复数形式；因为 η 与 E 和 H 有关系，所以 **E** 和 **H** 的相位必须写成复数形式。在真空中，这些限制却是不必要的。对于本题，使用余弦函数，有

$$\mathbf{H}(z,t) = -\frac{1}{3\pi}\cos(\omega t + \beta z)\mathbf{a}_y$$

对于沿 $-z$ 方向传播的波，可知

$$\frac{E_x}{H_y} = -\eta_0 = -120\pi\ \Omega \quad 或 \quad E_x = +40\cos(\omega t + \beta z)\ (\text{V/m})$$

因此

$$\mathbf{E}(z,t) = 40\cos(\omega t + \beta z)\mathbf{a}_x\ (\text{V/m})$$

由于 $\beta = 30\text{rad/m}$，所以

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\pi}{15}\text{m},\quad f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\times10^8}{\pi/15} = \frac{45}{\pi}\times10^8\ \text{Hz}$$

14.6 对于 $\mu_r = 1$、$\varepsilon_r = 8$ 和 $\sigma = 0.25$ pS/m 的材料，如果波的频率为 1.6MHz，确定传播常数 γ。

解 在本习题中，有

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \frac{0.25\times10^{-12}}{2\pi(1.6\times10^6)(8)(10^{-9}/36\pi)} \approx 10^{-9} \approx 0$$

所以

$$\alpha \approx 0 \quad 和 \quad \beta \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = 2\pi f\frac{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}{c} = 9.48\times10^{-2}\text{rad/m}$$

即 $\gamma = \alpha + j\beta \approx j9.48\times10^{-2}\text{m}^{-1}$。在给定频率下，材料与理想介质有相同的特性。1pS/m 数量级的电导率意味着材料应看作是绝缘体而不是导体。

14.7 确定奈培和分贝之间的转换因子。

解 考虑沿 $+z$ 方向传播的平面波，它的振幅按式 $E = E_0e^{-\alpha z}$衰减。由 14.12 节可知，波所携带的能量与 E^2 成正比，所以

$$P = P_0e^{-2\alpha z}$$

由分贝的定义，可知经过距离 z 的传播后功率下降为 $10\log_{10}(P_0/P)$dB。而

$$10\log_{10}\left(\frac{P_0}{P}\right)=\frac{10}{2.3026}\ln\frac{P_0}{P}=\frac{20}{2.3026}(\alpha z)=8.686(\alpha z)$$

因此，αz 奈培等价于 $8.686(\alpha z)$ 分贝，即

$$1\text{Np}=8.686\text{dB}$$

14.8 若 $\sigma=5\times10^{-3}$S/m，$\mu_r=1$，$\epsilon_r=8$，频率为多少时地球可看作理想介质？对这些频率，α 可认为是零吗？

解答 假设

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\leqslant\frac{1}{100}$$

为截止标志，则

$$f=\frac{\omega}{2\pi}\geqslant\frac{100\sigma}{2\pi\epsilon}=1.13\text{GHz}$$

当 $\sigma/\omega\epsilon$ 很小时，有

$$\alpha=\omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2}-1\right)}$$

$$\approx\omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right]}=\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}=\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}(120\pi)=0.333\text{Np/m}$$

因此，无论频率多么高，α 大约总是 0.333Np/m 或 3dB/m(见习题 14.7)，不能认为是 0。

14.9 对于铝，$\sigma=38.2$MS/m，$\mu_r=1$，求当频率为 1.6MHz 时铝的透入深度 δ，并求出 γ 和波速 u。

解答

$$\delta=\frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}}=6.44\times10^{-5}\text{m}=64.4\mu\text{m}$$

因为 $\alpha=\beta=\delta^{-1}$，所以

$$\gamma=1.55\times10^4+j1.55\times10^4=2.20\times10^4\,\underline{/45^\circ}(\text{m}^{-1})$$

$$u=\frac{\omega}{\beta}=\omega\delta=647(\text{m/s})$$

14.10 垂直极化波以 15°的入射角从区域 1($\epsilon_{r1}=8.5$，$\mu_{r1}=1$，$\sigma_1=0$)入射到区域 2(真空)中。已知 $E_0^i=1.0\mu$V/m，求 E_0^r、E_0^t、H_0^i、H_0^r 和 H_0^t。

解答 本征阻抗为

$$\eta_1=\frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_{r1}}}=\frac{120\pi}{\sqrt{8.5}}=129\,\Omega\quad\text{和}\quad\eta_2=\eta_0=120\pi\,\Omega$$

透射角可由下式求出

$$\frac{\sin15^\circ}{\sin\theta_t}=\sqrt{\frac{\epsilon}{8.5\epsilon_0}}\quad\text{或}\quad\theta_t=48.99^\circ$$

所以

$$\frac{E_0^r}{E_0^i}=\frac{\eta_2\cos\theta_i-\eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i+\eta_1\cos\theta_t}=0.623\quad\text{或}\quad E_0^r=0.623\,\mu\text{V/m}$$

$$\frac{E_0^t}{E_0^i}=\frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_i+\eta_1\cos\theta_t}=1.623\quad\text{或}\quad E_0^t=1.623\,\mu\text{V/m}$$

最后求得 $H_0^i=E_0^i/\eta_1=7.75$nA/m，$H_0^r=4.83$nA/m 和 $H_0^t=4.31$nA/m。

14.11 对于导电介质，$\sigma=58$MS/m，$\mu_r=1$，求频率 $f=100$ MHz 时介质的本征阻抗 η、传播常数 γ 和波速 u。

解答

$$\gamma=\sqrt{\omega\mu\sigma}\,\underline{/45^\circ}=2.14\times10^5\,\underline{/45^\circ}\text{m}^{-1}$$

$$\eta=\sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}\,\underline{/45^\circ}=3.69\times10^{-3}\,\underline{/45^\circ}\Omega$$

$$\alpha=\beta=1.51\times10^5,\ \delta=\frac{1}{\alpha}=6.61\mu\text{m},\ u=\omega\delta=4.15\times10^3\text{m/s}$$

14.12 在真空($z<0$)中，沿 $+z$ 方向传播的平面波垂直入射到 $z=0$ 的导体($z>0$)平面上，对于导体，$\sigma=61.7$MS/m 和 $\mu_r=1$。在真空中，波 $\mathbf{E}$ 的频率 $f=1.5$MHz，振幅为 1.0V/m；在交界面上有 $\mathbf{E}(0,t)=1.0\sin2\pi ft\ \mathbf{a}_y$(V/m)，求当 $z>0$ 时的 $\mathbf{H}(z,t)$。

解 当 $z>0$ 时，用复数形式表示有

$$\mathbf{E}(z,t)=1.0e^{-\alpha z}e^{j(2\pi ft-\beta z)}\mathbf{a}_y\quad(\mathrm{V/m})$$

在导体中，有

$$\alpha=\beta=\sqrt{\pi f\mu\sigma}=\sqrt{\pi(1.5\times10^6)(4\pi\times10^{-7})(61.7\times10^6)}$$
$$=1.91\times10^4$$

$$\eta=\sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}\angle45^\circ=4.38\times10^{-4}e^{j\pi/4}$$

由于 $E_y/(-H_x)=\eta$，所以

$$\mathbf{H}(z,t)=-2.28\times10^3e^{-\alpha z}e^{j(2\pi ft-\beta z-\pi/4)}\mathbf{a}_x\quad(\mathrm{A/m})$$

取虚部，有

$$\mathbf{H}(z,t)=-2.28\times10^3e^{-\alpha z}\sin(2\pi ft-\beta z-\pi/4)\mathbf{a}_x\quad(\mathrm{A/m})$$

式中 f、α、β 已由上面给出。

14.13 在真空中，$\mathbf{E}(z,t)=50\cos(\omega t-\beta z)\mathbf{a}_x(\mathrm{V/m})$。求在 $z=\mathrm{const.}$ 的平面上通过半径为2.5m的圆面积的平均功率。

解 写成复数形式，有

$$\mathbf{H}=50e^{j(\omega t-\beta z)}\mathbf{a}_x\quad(\mathrm{V/m})$$

因为 $\eta=120\pi\Omega$ 和传播方向为 $+z$ 方向，可知

$$\mathbf{H}=\frac{5}{12\pi}e^{j(\omega t-\beta z)}\mathbf{a}_y\quad(\mathrm{A/m})$$

所以
$$\mathbf{A}_{avg}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*)=\frac{1}{2}(50)\left(\frac{5}{12\pi}\right)\mathbf{a}_z\,\mathrm{W/m^2}$$

由于能流的方向与圆面垂直，所以有

$$P_{avg}=\frac{1}{2}(50)\left(\frac{5}{12}\right)(2.5)^2=65.1\mathrm{W}$$

14.14 如图14-11所示，电压源 v 通过同轴电缆与电阻 R 相连接。验证用介质中坡印廷矢量 **A** 导出的电阻上的瞬时功率与电路分析的结果相同。

解 由习题7.9和安培定律，可知

$$\mathbf{E}=\frac{v}{r\ln(b/a)}\mathbf{a}_r\quad 和\quad \mathbf{H}=\frac{i}{2\pi r}\mathbf{a}_\phi$$

其中 a、b 是导线的内、外半径，如图14-11(b)所示。所以

$$\mathbf{A}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}=\frac{vi}{2\pi r^2\ln(b/a)}\mathbf{a}_z$$

这就是瞬时功率密度。穿过介质截面的总功率为

$$P(t)=\int_0^{2\pi}\int_a^b\frac{vi}{2\pi r^2\ln(b/a)}\mathbf{a}_z\cdot r\,dr\,d\phi\,\mathbf{a}_z=vi$$

这也就是电路理论中给出电阻上消耗的瞬时功率。

14.15 如图14-12所示，在区域1内，$E_0^i=1.5\times10^{-3}\mathrm{V/m}$，$\varepsilon_{r1}=8.5$，$\mu_{r1}=1$，$\sigma=0$。区域2是真空。假设波在区域1内向区域2传播时是垂直入射的，确定在分界面上反射波和透射波的 **E** 和 **H** 的幅值。

解
$$\eta_1=\sqrt{\frac{\mu_0\mu_{r1}}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}}=129\ \Omega,\qquad \eta_2=120\pi\ \Omega=377\ \Omega$$

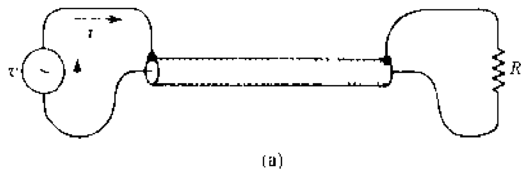
$$E_0^r=\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}E_0^i=7.35\times10^{-4}\ \mathrm{V/m}$$

$$E_0^t=\frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}E_0^i=2.24\times10^{-3}\ \mathrm{V/m}$$

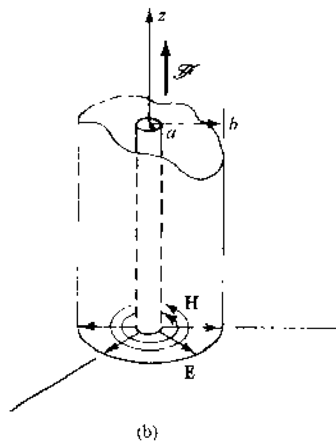
$$H_0^i=\frac{E_0^i}{\eta_1}=1.16\times10^{-5}\ \mathrm{A/m}$$

$$H_0^r=\frac{\eta_1-\eta_2}{\eta_1+\eta_2}H_0^i=-5.69\times10^{-6}\ \mathrm{A/m}$$

$$H_0^t = \frac{2\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} H_0 = 5.91 \times 10^{-6}\ \mathrm{A/m}$$



(a)



(b)

图 14-11

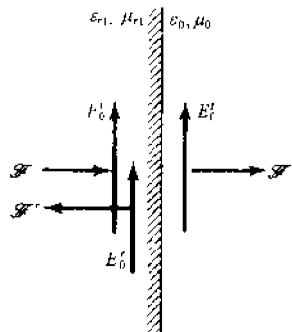


图 14-12

14.16 在真空区域 1 与区域 2 的交界面上的真空侧 $\mathbf{E}^t$ 的振幅为 1.0V/m。如果 $H_0^t = -1.41 \times 10^{-3}$A/m, $\varepsilon_{r2} = 18.5$, $\sigma_2 = 0$, 求 μ_{r2}。

解 由

$$\frac{E_0^r}{H_0^r} = -120\pi\ \Omega = -377\ \Omega \quad 和 \quad \frac{E_0^r}{E_0^i} = \frac{\eta_2 - 377}{377 + \eta_2}$$

得
$$\frac{E_0^t}{H_0} = \frac{1.0}{-1.41 \times 10^{-3}} = \frac{-377(377 + \eta_2)}{\eta_2 - 377} \quad 或 \quad \eta_2 = 1234\Omega$$

所以
$$1234 = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_{r2}}{\varepsilon_0 (18.5)}} \quad 或 \quad \mu_{r2} = 198.4$$

14.17 在海平面的自由空间一侧，垂直入射波 $\mathbf{E}$ 的振幅为 $E_0^i = 1.0$V/m；对于海水，$\varepsilon_r = 80$, $\mu_r = 1$, $\sigma = 2.5$S/m。当频率为 30MHz 时，在海平面下深度是多少时，$\mathbf{E}$ 的振幅为 1.0 mV/m?

解 设自由空间为区域 1，海水为区域 2。由于

$$\eta_1 = 377\ \Omega, \quad \eta_2 = 9.73\ \underline{/43.5^\circ}\ \Omega$$

那么在海水的内表平面上，$\mathbf{E}$ 的振幅为 E_0^t。这样

$$\frac{E_0^t}{E_0^i} = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \quad 和 \quad E_0^t = 5.07 \times 10^{-2}\ \mathrm{V/m}$$

由 $\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} = 24.36\ \underline{/46.53^\circ}\ \mathrm{m^{-1}}$，可得

$$\alpha = 24.36 \cos 46.53^\circ = 16.76\ \mathrm{Np/m}$$

从而 $1.0 \times 10^{-3} = (5.07 \times 10^{-2}) e^{-16.76z}$，所以

$$z = 0.234\mathrm{m}$$

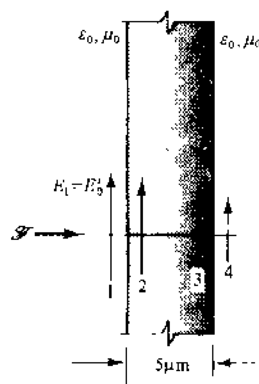


图 14-13

14.18 如图 14-13 所示，在真空中，振幅为 100V/m 的场 $\mathbf{E}$ 穿过厚度为 5μm 的银板。若银的电导率为 $\sigma = 61.7$MS/m，场的频率为 $f = 200$MHz，求 $|E_2|$、$|E_3|$ 和 $|E_4|$ 的振幅。

解 当 $f = 200$MHz 时，对于银，有 $\eta = 5.06 \times 10^{-3}\ \underline{/45^\circ}\ \Omega$，利用

$$\frac{E_2}{E_1}=\frac{2(5.06\times10^{-3}\angle 45^\circ)}{377+5.06\times10^{-3}\angle 45^\circ}$$

得 $$|E_2|\approx2.68\times10^{-5}\,\mathrm{V/m}$$

在导体内，有

$$\alpha=\beta=\sqrt{\pi f\mu\sigma}=2.21\times10^5$$

因此，当波穿过银导体时，不但幅值要衰减而且还会产生相位移。由于$|E_3|$和$|E_4|$代表正弦波的最大振幅，所以与相位移无关。这样

$$|E_3|=|E_2|e^{-\alpha z}=(2.68\times10^{-5})e^{-(2.21\times10^5)(5\times10^{-6})}=8.88\times10^{-6}\,\mathrm{V/m}$$

$$\frac{E_4}{E_3}=\frac{2(377)}{377+5.06\times10^{-3}\angle 45^\circ}$$

因此 $$|E_4|\approx1.78\times10^{-5}\,\mathrm{V/m}$$

补 充 习 题

14.19　在真空中，已知 $\mathbf{E}(z,t)=10^3\sin(6\times10^8t-\beta z)\mathbf{a}_y$ (V/m)，当波沿 z 轴用时间 t_1 传播 $\lambda/4$ 时，画出 $t=0$ 和 $t=t_1$ 时的波形图，并求 t_1、β 和 λ。

答案：$t_1=2.62$ns，　$\beta=2$rad/m，　$\lambda=\pi$m，见图 14-14。

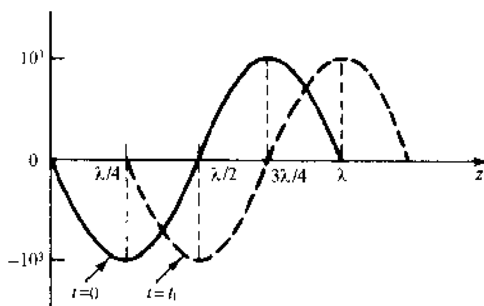


图 14-14

14.20　在真空中，$\mathbf{H}(z,t)=1.0e^{j(1.5\times10^8t+\beta z)}\mathbf{a}_x$ (A/m)，求 $\mathbf{E}(z,t)$ 的表达式，并确定传播方向。

答案：$E_0=377$V/m，　$-\mathbf{a}_z$

14.21　在真空中，$\mathbf{H}(z,t)=1.33\times10^{-1}\cos(4\times10^7t-\beta z)\mathbf{a}_x$ (A/m)，求 $\mathbf{E}(z,t)$ 的表达式，并求 β 和 λ。

答案：$E_0=50$V/m，$\left(\frac{4}{30}\right)$rad/m，$15\pi$ m

14.22　波速为 10^6m/s 的行波由公式 $y=10\cos(2.5z+\omega t)$ 描述。当 $t=0$ 和 $t=t_1=0.838\mu$s 时，作出关于变量 z 的函数的波形图。在这两个时间内行波传播了多少个波长？

答案：$\frac{1}{3}$，见图 14-15

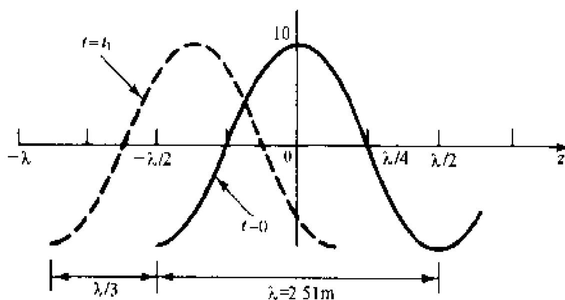


图 14-15

14.23　当 $t=0$、$z=3\lambda/4$ 时，求 $\mathbf{E}(z,t)=10\sin(\omega t-\beta z)\mathbf{a}_x-15\sin(\omega t-\beta z)\mathbf{a}_y$ (V/m) 的幅值和方向。

答案：18.03V/m，$0.555\mathbf{a}_x-0.832\mathbf{a}_y$

14.24 对于 $\mu_r=1$、$\epsilon_r=15$、$\sigma=0$ 的介质，频率为 500kHz 时确定传播常数 γ。电磁波在介质中传播的速度是多少?

答案：$j4.06\times10^{-2}\text{m}^{-1}$，$7.74\times10^7$m/s

14.25 电磁波在真空中的波长为 0.2m。当该电磁波透射到理想介质中时，波长变为 0.09m。假设 $\mu_r=1$，确定 ϵ_r 和波在理想介质中的波速。

答案：4.94，1.35×10^8m/s

14.26 电磁波在真空中的相移常数为 0.524 rad/m，当其透射到 $\mu_r=1$ 的理想介质中时，相移常数为 1.81 rad/m。假设 $\mu_r=1$，求 ϵ_r 和传播速度。

答案：11.9，8.69×10^7m/s

14.27 已知介质的参数为 $\epsilon_r=16$，$\mu_r=4.5$，$\sigma=0.6$S/m，求在 400MHz 时介质的传播常数，并求介质中的波速与真空中的波速之比

答案：$99.58\angle60.34^\circ\text{m}^{-1}$，0.097

14.28 对于弱导电介质，$\epsilon_r=1.85$，$\mu_r=800$，$\sigma=1$ S/m，当频率为 10^9Hz 时，求 α、β、η 和波速 u。已知该介质中场为 $\mathbf{E}(z,t)=50.0e^{-\alpha z}\cos(\omega t-\beta z)\mathbf{a}_y$(V/m)，求 $\mathbf{H}(z,t)$。

答案：1130Np/m，　2790rad/m，　$2100\angle22.1^\circ\Omega$，　2.25×10^6m/s，

$2.38\times10^{-2}e^{-\alpha z}\cos(\omega t-0.386-\beta z)(\ \ \mathbf{a}_x)$　(A/m)

14.29 已知银的电导率为 $\sigma=3.0$MS/m，求透入深度 δ 为 1mm 时的频率。

答案：84.4kHz

14.30 若在铜($\sigma=58.0$MS/m)介质内波的相移常数为 3.71×10^5ras/m，求频率。

答案：601MHz

14.31 已知在某种液体的内表面上 $\mathbf{E}$ 的振幅为 10.0V/m。液体的参数为 $\mu_r=1$，$\epsilon_r=20$，$\sigma=0.50$S/m。试确定在液体介质内 10cm 处，当频率分别为(a) 5MHz，(b) 50MHz，(c) 500MHz 时，$\mathbf{E}$ 的振幅。

答案：(a) 7.32 V/m；(b) 3.91 V/m；(c) 1.42 V/m

14.32 在真空中，$\mathbf{E}(z,t)=1.0\sin(\omega t-\beta z)\mathbf{a}_x$(V/m)。求在 $z=$ const. 的平面上通过半径为 15.5m 的圆面的平均功率。

答案：1W

14.33 在球坐标系中，球面波

$$\mathbf{E}=\frac{100}{r}\sin\theta\cos(\omega t-\beta r)\,\mathbf{a}_\theta(\text{V/m}),\quad \mathbf{H}=\frac{0.265}{r}\sin\theta\cos(\omega t-\beta r)\,\mathbf{a}_\varphi(\text{A/m})$$

代表真空中某一偶极子天线在远距离 r 处产生的电磁场。求通过半球面 $r=1$km、$0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$ 的平均功率。

答案：55.5W

14.34 在真空中，$\mathbf{E}(z,t)=150\sin(\omega t-\beta z)\mathbf{a}_x$(V/m)。求在平面 $z=0$ 上通过 30mm×15mm 矩形面积的总功率。

答案：13.4 mW

14.35 在真空-银的分界面的真空一侧，$E_0^i=100$V/m。已知频率为 15MHz，银的参数为 $\epsilon_r=\mu_r=1$，$\sigma=61.7$MS/m，确定在交界面上的 E_0^r 和 E_0^t。

答案：　100V/m，$7.35\times10^{-4}\angle45^\circ$V/m

14.36 在真空-导体的分界面的真空一侧，$H_0^i=1.0$A/m。已知频率为 31.8MHz，导体的参数为 $\epsilon_r=\mu_r=1$，$\sigma=1.26$MS/m。确定 H_0^r、H_0^t 和 $\mathbf{H}^t$ 的透入深度。

答案：1.0 A/m，2.0 A/m，80μm

14.37 如图 14-16 所示，在真空中，振幅为 1.0 A/m 的场 $\mathbf{H}$ 以 200MHz 的频率穿过 5μm 厚的银板，银的电导率为 $\sigma=61.7$MS/m，求波刚穿过银板时 H_0^t 的值。

答案：1.78×10^{-5}A/m

14.38 如图 14-17 所示，真空中振幅为 100V/m 的场 $\mathbf{E}$ 穿过理想介质，求 E_0^t。

答案：59.7 V/m

14.39 如图 14-18 所示，在真空中场 $\mathbf{E}$ 穿过弱导电介质。已知频率为 500MHz，$E_0^i=100$V/m，确定 E_0^t 和 H_0^t。

答案：19.0 V/m，0.0504 A/m

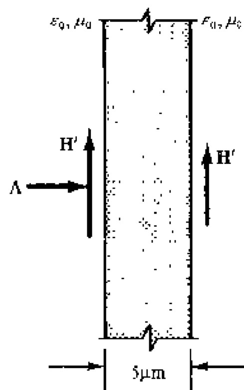


图 14-16

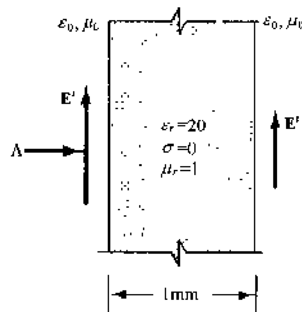


图 14-17

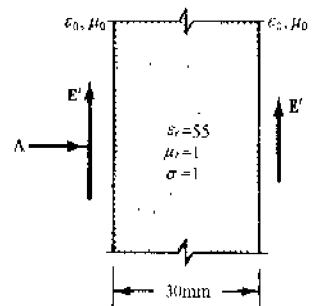


图 14-18

14.40　波从某种介质中传播到与真空的交界面上。若入射角为 20°的临界角，求介质的相对磁导率。

答案：8.55

14.41　分别计算垂直入射和以 $\theta_i = 10°$ 的角斜入射时，E_0^r/E_0^i 和 E_0^t/E_0^i 的值。对于区域 1，参数为 $\epsilon_{r1} - 8.5$，$\mu_{r1} = 1$，$\sigma = 0$，区域 2 为真空。

答案：垂直入射时，E_0^r/E_0^i -0.490 和 $E_0^t/E_0^i - 1.490$；$\theta_i - 10°$ 时，$E_0^r/E_0^i - 0.539$ 和 $E_0^t/E_0^i = 1.539$

14.42　水平极化波以 75°的布儒斯特角由空气入射到某种介质中，求介质的 ϵ_r。

答案：13.93

第15章 传输线

(作者 M. L. Kult)

15.1 引言

第14章研究了无引导传播的电磁能。本章将研究电介质中波被两个导体引导时能量的传输。精确地分析这种两导体**传输线**需要使用电磁场理论。然而，通过建立分布参数的传输线模型，再利用与电场和磁场相关的电压和电流便可预测系统的性能。

本章仅考虑均匀传输线，即线路的分布参数为常数。

15.2 分布参数

线路每单位长度的分布参数是第7章和第11章叙述的电感、电容、导体的电阻以及电介质的电导。显然，这些参数取决于线路的几何结构、材料的性质，有些情况下还取决于电磁波的频率。以下给出的表达式中几何形状的影响用**几何因子** GF 表示：

电容

$$C = \pi\epsilon_d \times (\mathrm{GFC}) \quad (\mathrm{F/m}) \quad (\epsilon_d \text{ 为电介质的介电常量})$$

电导

$$G = \frac{C}{\epsilon_d}\sigma_d \quad (\mathrm{S/m}) \quad (\sigma_d \text{ 为电介质的电导率})$$

外电感

$$L_e = \frac{\mu_d}{\pi} \times (\mathrm{GFL}) \quad (\mathrm{H/m}) \quad (\mu_d \text{ 为电介质的磁导率}, \mu_d \approx \mu_0)$$

直流电阻(工作于10kHz以下)

$$R_d = \frac{1}{\sigma_c \pi} \times (\mathrm{GFR}_d) \quad (\Omega/\mathrm{m}) \quad (\sigma_c \text{ 为导体的电导率})$$

交流电阻(频率在10kHz以上)

$$R_a = \frac{1}{2\pi\sigma_c\delta} \times (\mathrm{GFR}_a) \quad (\Omega/\mathrm{m}) \quad \left(\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_c \sigma_c}} \text{ 为趋肤深度}\right)$$

内电感

$$L_i = \begin{cases} R_a/2\pi f \ (\mathrm{H/m}), f > 10\mathrm{kHz} \\ \mu_0/8\pi \ (\mathrm{H/m}), f < 10\mathrm{kHz} \end{cases}$$

总电感

$$L_t = L_e + L_i \approx L_e$$

对于三种常见的线路结构，几何因数如下：

同轴线(内半径为 a，外半径为 b，外部的厚度为 t)

$$\mathrm{GFC} = \frac{2}{\ln(b/a)}, \quad \mathrm{GFL} = \frac{1}{\mathrm{GFC}}$$

$$\mathrm{GFR}_d = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{t(b+t)}, \quad \mathrm{GFR}_a = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad (t \gg \delta)$$

平行金属线(导线的半径为 a，线间距离为 d)

$$\mathrm{GFC} = \frac{1}{\mathrm{GFL}}, \quad \mathrm{GFL} = \cosh^{-1}\frac{d}{2a} \approx \ln\frac{d}{a} \quad (d \gg a)$$

$$\mathrm{GFR}_d = \frac{2}{a^2}, \quad \mathrm{GFR}_a = \frac{2}{a}$$

平行板(平板宽度为 w,厚度为 t,板间距离为 d)

$$\mathrm{GFC} = \frac{w}{\pi d}, \quad \mathrm{GFL} = \frac{1}{\mathrm{GFC}}$$

$$\mathrm{GFR}_d = \frac{2\pi}{wt}, \quad \mathrm{GFR}_a = \frac{4\pi}{w} \quad (t \gg \delta)$$

15.3　增量模型　电压　电流

如图 15-1 所示的传输线模型,其中参数 R、L、G 和 C 在 15.2 节中已给出。在长度为 Δx 的范围内,线路上点 a 和点 b 之间的电压为

$$\Delta v(x,t) = (R\Delta x)i(x,t) + (L\Delta x)\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$

取极限 $\Delta x \to 0$,上式变为

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = Ri(x,t) + L\frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \tag{1}$$

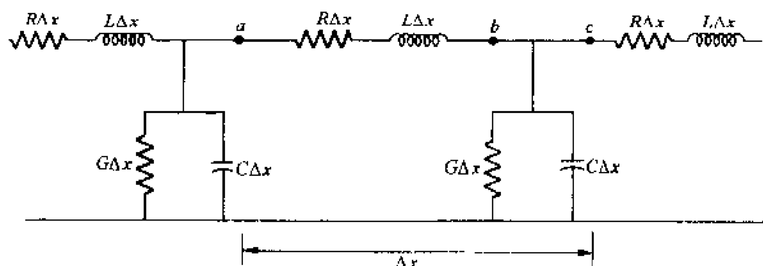


图 15-1

同理,点 c 的电流与点 b 的电流相差

$$\Delta i(x,t) = (G\Delta x)v(x,t) + (C\Delta x)\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}$$

根据上式,可得

$$\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = Gv(x,t) + C\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \tag{2}$$

一阶偏微分方程(1)和(2)隐含了一个关于 $v(x,t)$ 或 $i(x,t)$ 的二阶偏微分方程:

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = RGf(x,t) + (RC + LG)\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} \tag{3}$$

式(3)是双曲型方程,与波动方程非常相似。实际上,对于无损耗线($R = G = 0$),式(3)恰是第 14 章中所研究的一维标量波动方程。因此可知,传输线支持电压波和电流波,它们在传输线内的不连续处(参数突变处)被反射和/或折射。

15.4　正弦稳态激励

图 15-1 中的传输线被正弦电源(角频率为 ω)激励一段时间后,电压和电流会变成同一频率的正弦形式:

$$v(x,t) = \mathrm{Re}[\hat{V}(x)e^{j\omega t}], \quad i(x,t) = \mathrm{Re}[\hat{I}(x)e^{j\omega t}]$$

一般情况下,相量 $\hat{V}(x)$ 和 $\hat{I}(x)$ 是复数,它们常用极坐标形式表示为(自变量 x 省略不写)

$$\hat{V} = |\hat{V}|\underline{/\varphi_V}, \hat{I} = |\hat{I}|\underline{/\varphi_I}$$

式中 φ 表示复数矢量与实轴之间的夹角。当所有的电压和电流都用相量形式表示时,传输线的稳态分析就会大大简化。

图 15-2 建立了长为 l、终端连接负载 Z_R、始端用内阻抗为 Z_g、电源电压为 $\hat{V}_g =$

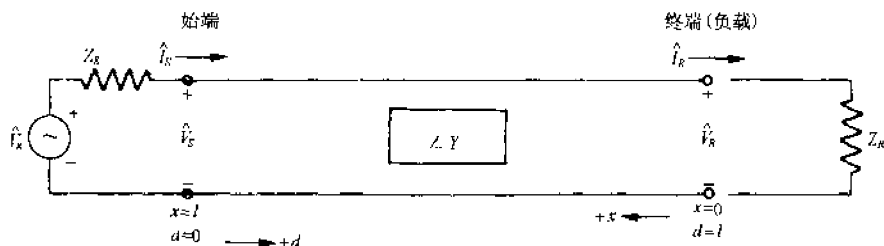


图 15-2

$V_{gm}/0$激励的均匀传输线模型。线路每单位长度的串联阻抗和并联导纳为

$$Z = R + j\omega L, \quad Y = G + j\omega C$$

从终端算起,距终端的距离用变量 x 度量,距始端的距离用 d 度量。

15.3 节中的方程(1),(2)和(3)可变换成关于相量 $\hat{V}(x)$和 $\hat{I}(x)$的常微分方程:

$$\frac{d\hat{V}(x)}{dx} = Z\hat{I}(x) \tag{1'}$$

$$\frac{d\hat{I}(x)}{dx} = Y\hat{V}(x) \tag{2'}$$

$$\frac{d^2\hat{F}(x)}{dx^2} = \gamma^2\hat{F}(x) \tag{3'}$$

式中 $\gamma = \sqrt{ZY} = \alpha + j\beta$,选择算术平方根的目的是使 α 和β 非负。方程(3′)在形式上与平面波方程相同(14.3 节),它具有行波解

$$\hat{V}(x) = \hat{V}^+ e^{\gamma x} + \hat{V}^- e^{-\gamma x} \equiv \hat{V}_{inc}(x) + \hat{V}_{refl}(x)$$

$$\hat{I}(x) = \hat{I}^+ e^{\gamma x} + \hat{I}^- e^{-\gamma x} \equiv \hat{I}_{inc}(x) - \hat{I}_{refl}(x)$$

系数 $\hat{V}^+$、$\hat{I}^+$、$\hat{V}^-$和 $\hat{I}^-$是与 x 无关但与**特性阻抗** Z_0 和**边界反射系数** Γ_R 有关的相量。Z_0 和 Γ_R 定义为

$$Z_0 \equiv \frac{\hat{V}^+}{\hat{I}^+} = -\frac{\hat{V}^-}{\hat{I}^-} = \sqrt{\frac{Z}{Y}}$$

$$\Gamma_R \equiv \frac{\hat{V}^-}{\hat{V}^+} = -\frac{\hat{I}^-}{\hat{I}^+} = \frac{\hat{V}_{refl}(0)}{\hat{V}_{inc}(0)}$$

Γ_R 可用特性阻抗和负载阻抗表示为

$$\Gamma_R = \frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0}$$

某一点的反射系数定义为

$$\Gamma(x) \equiv \frac{\hat{V}_{refl}(x)}{\hat{V}_{inc}(x)}$$

从而有

$$\Gamma(x) = \Gamma_R e^{-2\gamma x} = \frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0} e^{-2\gamma x}$$

如果 $Z(x) \equiv \hat{V}(x)/\hat{I}(x)$是从始端向终端($x=0$)看过去的点 x 处的阻抗,那么

$$Z(x) = Z_0 \frac{1 + \Gamma(x)}{1 - \Gamma(x)}$$

同理,从始端向终端看过去的各量为($\Gamma(x)$替换成 Γ_S)

$$Z_S = Z_0 \frac{1 + \Gamma_S}{1 - \Gamma_S}, \qquad \hat{V}_S = \hat{V}_g \frac{Z_S}{Z_S + Z_g}, \qquad \hat{I}_S = \frac{\hat{V}_S}{Z_S}$$

负载端接收的平均功率以及始端提供的平均功率可分别用以下两式计算:

$$P_R = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\hat{V}_R\hat{I}_R^*) = \frac{1}{2}|\hat{I}_R|^2\mathrm{Re}(Z_R)$$
$$= P_{inc}|_{x=0} - P_{refl}|_{x=0}$$
$$P_S = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\hat{V}_S\hat{I}_S^*) = \frac{1}{2}|\hat{I}_S|^2\mathrm{Re}(Z_S)$$

对高频或无损耗传输线的简化：

当频率满足 $R \ll \omega L$ 和 $G \ll \omega C$ 时(例如大于 1MHz)，均匀传输线可按无损耗线处理。此时

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \approx \sqrt{\frac{L}{C}} = R_0$$
$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \approx \left(\frac{R}{2R_0} + \frac{GR_0}{2}\right) + j\omega\sqrt{LC} = \alpha + j\beta$$
$$u_p \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{1}{f\sqrt{LC}}$$

式中 u_p 和 λ 分别代表相速和波长。

对于 $R=0$ 和 $G=0$ 的理想无损耗线，反射系数为

$$\Gamma(x) = \Gamma_R e^{-j2\beta x} = \left|\frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0}\right| \angle(\varphi_R - 2\beta x)$$

式中 φ_R 是 Γ_R 的极角。电压为

$$\hat{V}(x) = \hat{V}^+[1 + \Gamma_R\angle(-2\beta x)]$$

上式隐含

$$|\hat{V}|_{max} = |\hat{V}^+|(1 + |\Gamma_R|), \qquad |\hat{V}|_{min} = |\hat{V}^+|(1 - |\Gamma_R|)$$

相邻的最大值和最小值相距 $\beta x = 90°$ 或四分之一波长。对于在无损耗线上传播的波，定义**电压驻波比** VSWR 为

$$\mathrm{VSWR} \equiv \frac{|\hat{V}|_{max}}{|\hat{V}|_{min}} = \frac{1 + |\Gamma_R|}{1 - |\Gamma_R|}$$

对于损耗小的传输线，如果对衰减作一修正，VSWR 仍适用(见习题 15.2、15.9、15.41)。

15.5 史密斯图

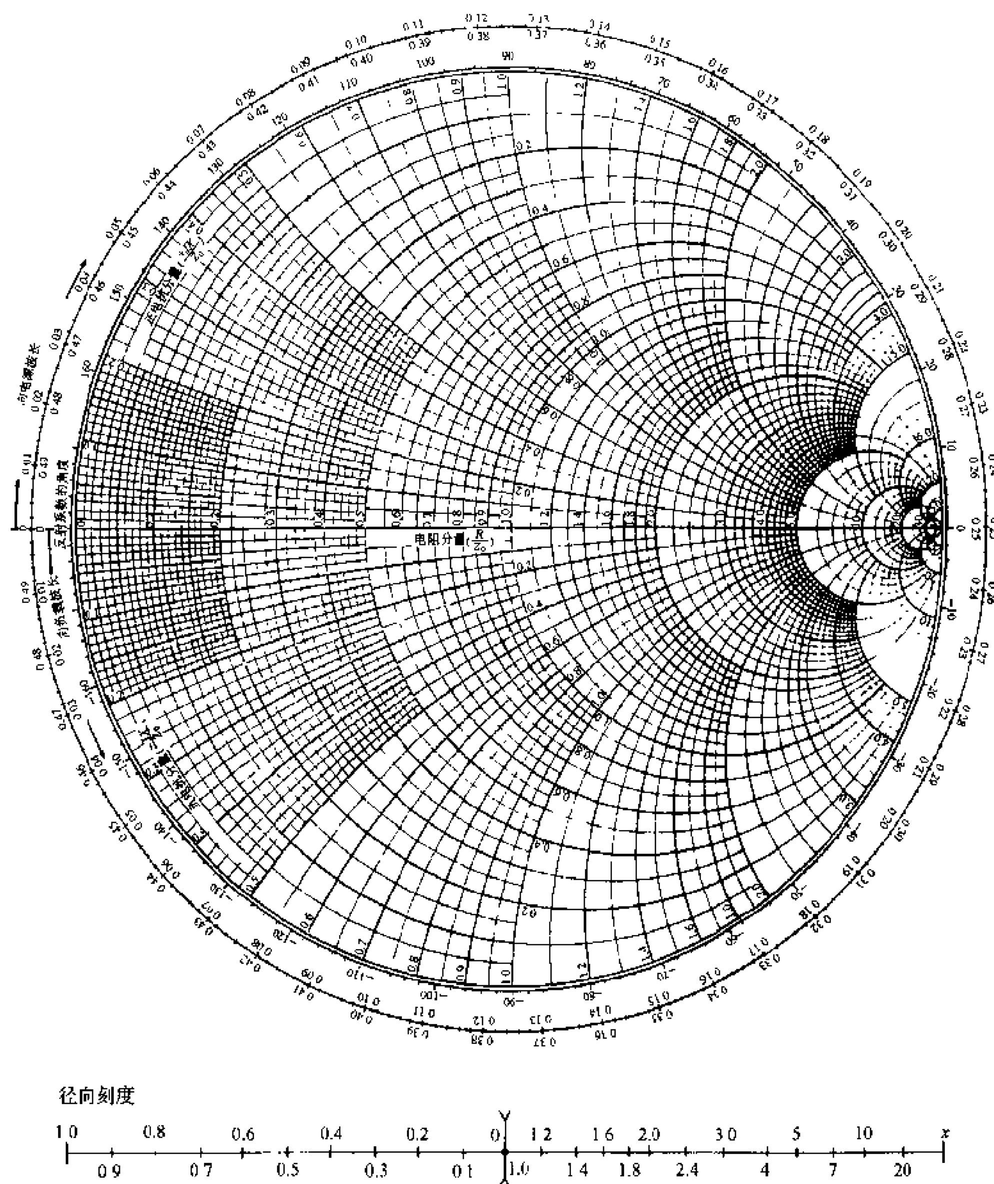
史密斯图(图 15-3)是求解高频传输线问题的一种图形工具。它是用归一化阻抗 $r + j\chi$ 表示的反射系数的曲线图。

$$\frac{Z(x)}{R_0} \equiv z(x) \equiv r(x) + j\chi(x) = \frac{1 + \Gamma(x)}{1 - \Gamma(x)}$$
$$\Gamma(x) = \Gamma_R \underline{/(-2\beta x)} = \left|\frac{r_0 + j\chi_0 - 1}{r_0 + j\chi_0 + 1}\right| \underline{/(\varphi_R - 2\beta x)} \equiv \Gamma_r + j\Gamma_i \quad (\alpha = 0)$$

式中 $r_0 = r(0)$，$\chi_0 = \chi(0)$。在 Γ 复平面中，r 为常数的曲线是圆，如图 15-4(b)所示，就像图 15-4(a)中 $|\Gamma|$ 为常数的曲线是圆一样；χ 为常数的曲线是圆弧，如图 15-4(c)所示。表 15-1 中列出了一些重要的对应关系。

表 15-1

条　件	Γ	r	χ
开　路	$1\angle 0°$	∞	任　意
开　路	$1\angle 0°$	任　意	∞
短　路	$1\angle 180°$	0	0
纯电抗	$1\angle \pm 90°$	0	± 1
匹配线路	0	1	0



从$|\Gamma|$为常数的圆的圆心到点(r,x)的径向长度对应的反射系数幅值(左侧)和电压驻波比(右侧)

图 15-3　史密斯图:归一化电阻和电抗坐标

完整的史密斯图 15-3 是通过图 15-4(b)和(c)的叠加形成的[①],它不包含$|\Gamma|$为常数的圆;实际上,对应于点(r,χ)的$|\Gamma|$值可从左侧的外部刻度读出,VSWR 的值可从右侧刻度中读出。两个圆周的距离刻度是波长的零点几。从$r=0$线和$\chi=0$线的交点开始,外边的刻度顺时针

---

① 设$\Gamma=\Gamma_r+j\Gamma_i$,则

$$r+j\chi=\frac{1+\Gamma_r+j\Gamma_i}{1-\Gamma_r-j\Gamma_i}$$

上式两端的实部和虚部必须分别相等,于是就有

$$r=\frac{1-\Gamma_r^2-\Gamma_i^2}{(1-\Gamma_r)^2+\Gamma_i^2},\qquad \chi=\frac{2\Gamma_i}{(1-\Gamma_r)^2+\Gamma_i^2}$$

这两个表达式都是Γ_r和Γ_i的二次函数,通过配方可把这两个等式分别化成

$$\left(\Gamma_r-\frac{r}{1+r}\right)^2+\Gamma_i^2=\left(\frac{1}{1+r}\right)^2,\qquad (\Gamma_r-1)^2+\left(\Gamma_i-\frac{1}{\chi}\right)^2=\left(\frac{1}{\chi}\right)^2$$

以上两个方程都是Γ复平面中的圆方程,在Γ复平面上分别画出对应的曲线族,然后再重叠起来,就成了史密斯图。——译者注

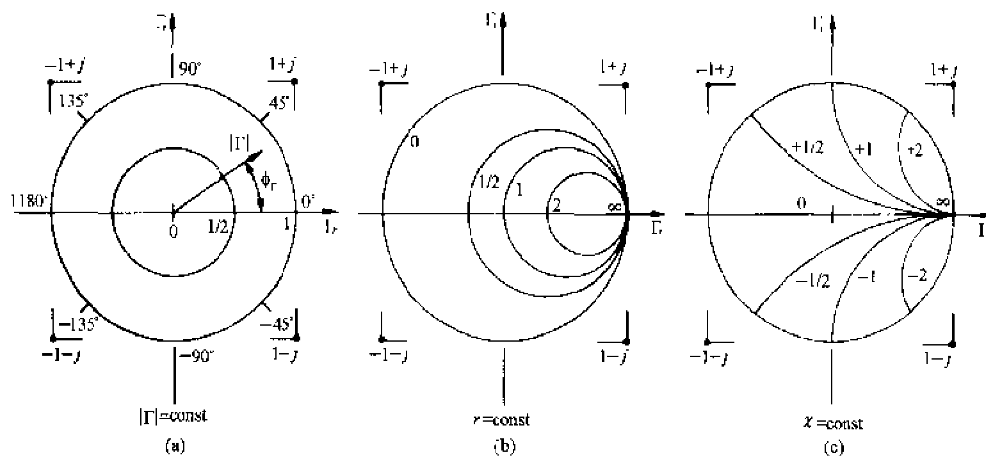


图 15-4

旋转**向电源**(即从终端算起的度量 x/λ),里边的刻度逆时针旋转**向负载**(即从始端算起的度量 d/λ),绕图一周为二分之一波长。第三个圆周的刻度是 $\varphi_\Gamma=\varphi_R-2\beta x$。

该图也适用于归一化导纳[①]

$$\frac{Y(x)}{G_0}\equiv y(x)\equiv g(x)+jb(x)$$

此时,史密斯图中 r 线变成了 g 线,χ 线变成了 b 线。对于已知的 y,Γ 的角度为 $180°+\varphi_\Gamma$,并且点 $y=0+j0$ 对应于开路。

15.6 阻抗匹配

在高频下,传输线应工作在最小 VSWR 状态(理想情况下,应是 VSWR=1)。使用一些方法可让负载与线路匹配,或者匹配具有不同特性阻抗的串级线路。匹配网络可以放在负载处($x=0$),也可以放在线路的某一位置 $x=x_1$ 处,如图 15-5 所示。两种情况的归一化条件如下:

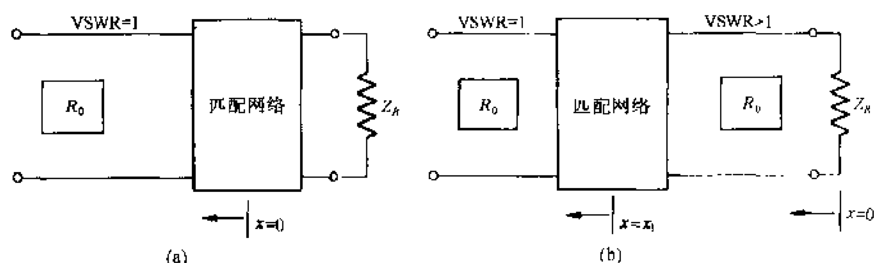


图 15-5

(a) 匹配前:$z(0)=z_R=r_0+jx_0$; $y(0)=g_0+jb_0$; VSWR>1

匹配后:$z(0)=1+j0$; $y(0)=1+j0$; VSWR=1

(b) 负载处:$z(0)=r_0+jx_0$; $y(0)=g_0+jb_0$; VSWR(0)>1

匹配前:$z(x_1)=r_1+jx_1$; $y(x_1)=g_1+jb_1$; VSWR=WSWR(0)

匹配后:$z(x_1)=1+j0$; $y(x_1)=1+j0$; VSWR=1

---

①令 $G_0=\frac{1}{R_0}$,则归一化导纳成为

$$\frac{Y(x)}{G_0}=\frac{R_0}{Z(x)}=\frac{1-\Gamma(x)}{1+\Gamma(x)}\equiv y(x)\equiv g(x)+jb(x)$$

把上式中的 Γ 换成 $\Gamma e^{j180°}=-\Gamma$,则上式与用归一化阻抗表示的 Γ 完全一样。换言之,只要将阻抗形式的史密斯图旋转 180°就可得到导纳形式的史密斯图,此时 r 线和 χ 线分别变成了 g 线和 b 线。——译者注

在较低频率下，匹配网络可由集总低损耗电抗元件组成。图 15-6 给出了一种集总 L-C 网络。如果 Z_R 含有电抗元件，则要串联一个反符号的电抗使得 $Z_R' = R + j0$。于是，为了匹配，应使

$$Y_{in} = j\omega C_2 + \frac{1}{R + j\omega L_1} = \frac{1}{R_0}$$

图 15-6

从而可解得

$$L_1 = \frac{1}{\omega}\sqrt{R(R_0 - R)} \quad 和 \quad C_2 = \frac{L_1}{RR_0}$$

如果 $R > R_0$，在电感器的另一端应连接一个电容器。

在较高的频率下，为了使损耗减至最小，可使用一段开路线或短路线来匹配，其结构为**单短截线**或**双短截线**形式。

15.7 单短截线匹配

如图 15-7 所示的结构使用了一根短路的短截线，长为 l_s，放在距负载 x_1 处。为了完成匹配，应

(1) 确定 x_1，使 $y(x_1) = 1 + jb_1$；

(2) 确定 l_s，使 $y(l_s) = 0 - jb_1$。

匹配后，从 x_1 到 l_s，$y(x_1) = 1 + j0$ 且 VSWR = 1。

例 1 使用史密斯图完成以上两步(图 15-8)。

解 (i)标出 y_R，绘制 $|\Gamma_R|$(或 VSWR(0))圆。

(ii)标出 $|\Gamma_R|$ 圆与 $g = 1$ 圆的交点。

(iii)从 y_R 移动向电源至第一个交点，读出 $y_1 = 1 + jb_1$，并且记下距离 x_1，它是 λ 的零点几(或读出角度 $2\beta r_1$)。

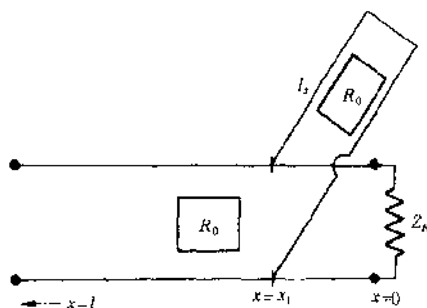


图 15-7

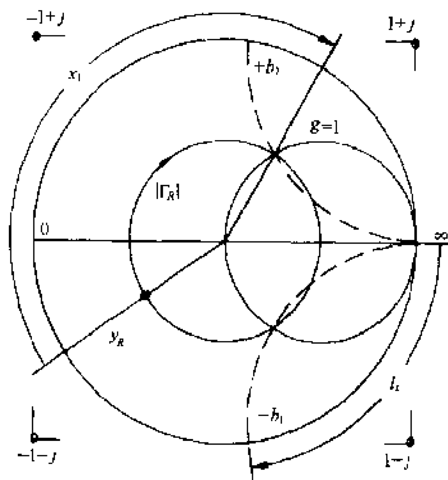


图 15-8

(iv)在 $|\Gamma| = 1$ 圆上标出点 $y = 0 - jb_1$。从短路位置 $y = \infty$ 移动向电源至点 $y = -jb_1$，记下距离 l_s，它是 λ 的零点几。如果不能到达第一个交点，则重新调整短截线的长度使得电纳在新的位置，然后使用第二个交点。

对于用不同的特性阻抗匹配的两条串级线路，在连接点处，即等效负载是第二条线路的输入阻抗处，可使用上述过程。

15.8　双短截线匹配

如图 15-9 所示，一个双短截线"调谐器" 在主线路上具有两根相距 d_s 的短路短截线。短截线 1 距负载最近，通常被连在负载处($x=0$)。两根短截线通常相距 $\lambda/4$ 和 $3\lambda/8$，因此具有"四分之一波长调谐器"等名称。对于给定的 d_s，用史密斯图求解双短截线匹配问题涉及到**调谐器圆**的构造。这个圆是 $g_T-g(d_s)=1$ 圆，它对短截线 2 所起的作用和 $g=1$ 圆对主线路所起的作用相同。调谐器圆通过绕图的中心 $1+j0$ 顺时针旋转 $g=1$ 圆获得：旋转 180°得到 $\lambda/4$ 调谐器圆，旋转 90°得到 $3\lambda/8$ 调谐器圆，等等。见图 15-10。

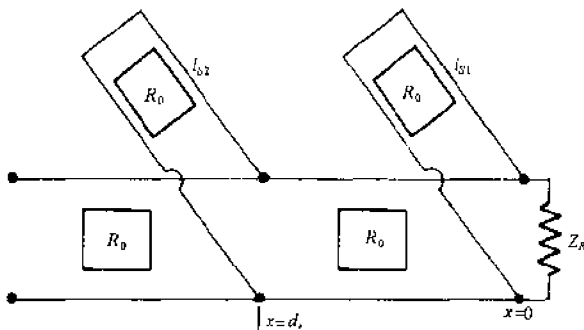


图 15-9

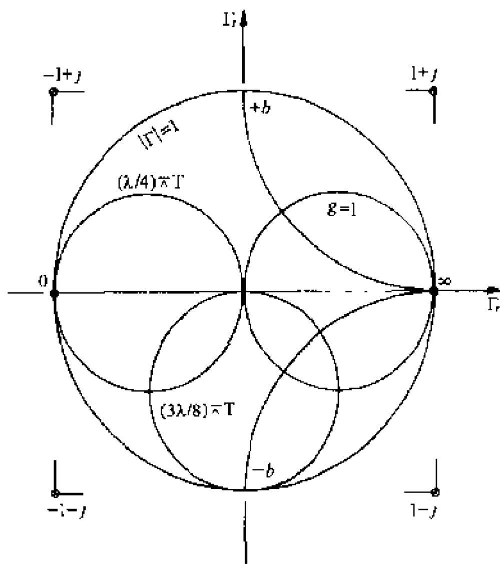


图 15-10

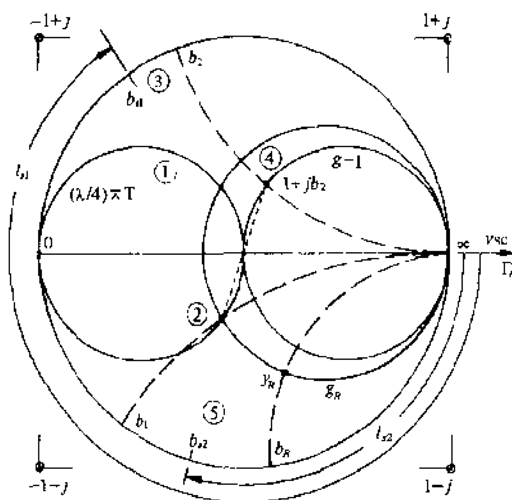


图 15-11

例 2　假设 $d_s=\lambda/4$，双短截线匹配采用以下五步，如图 15-11 所示。

解　(i) 绘制 $\lambda/4$ 调谐器圆。

(ii) 标出调谐器圆与穿过起始点 $y_R=g_R+jb_R$ 的 g_R 圆的交点。读出此点处的 b_T，这也可能是另一个交点。

(iii) $x=0$ 处的短截线 1 用于把电纳 b_R 变为 b_T。

(iv) 在 $|\Gamma_R|$ 圆上从 $y_T=g_R+jb_T$ 移向电源 $d_s=\lambda/4$ 至 $g=1$ 圆上，读出 $y=1+jb_2$。

(v) 通过调整短截线 2 抵消电纳，产生匹配条件 $y=1+j0$。

用 $\lambda/4$ 调谐器匹配 $g_R>1$ 的负载时，由于电导圆和调谐器圆不相交，所以会出现问题。$3\lambda/8$ 调谐器适用于 $g_R>1$ 的某些值。总之，可从负载处移动调谐器 x_1 的距离使得 g 在匹配的范围内。要想在被替代的位置处使 $g=1$，就要满足单根短截线的条件，并且必须调整短截线 2 使得 $b=0$。

注意线路不同截面上的驻波。每一根短路短截线具有 VSWR = ∞。当 $d_s < x < l$ 时，VSWR = 1；当 $0 < x < d_s$ 时，VSWR 由 $y = g_R + jb_r$ 确定。如果在负载和短截线1之间加一根线，那么 VSWR 由 y_R 确定。

15.9 阻抗测量

在高频同轴线路上使用**开槽线**可以测量 VSWR，并且可以确定线路上电压最小值的位置。借助于史密斯图，根据 VSWR 以及电压最小值距短路参考位置的距离，可以很容易求出未知的终端阻抗。

图 15-12 中，在恰当的终端处接入开槽线。Z_R 的位置不动，探针沿线路移动可找出最大电压和最小电压的位置并且测量出它们的值。采用合适的放大器/显示器可把探针的输出转换成 VSWR 读数。Z_R 用短路代替，此时 VSWR = ∞。通过测量可知，电压最大值和最小值在空间相差 $\lambda/4$。

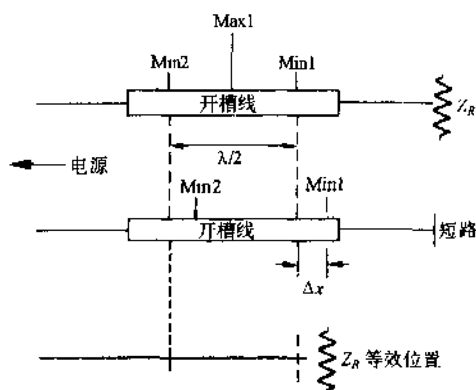


图 15-12

为了用史密斯图求 Z_R，画出测量所得的 VSWR 圆如图 15-13 所示，确定最小电压线的位置（在 $\chi = 0$ 线上从 0 至 1）。把测量所得的 Δx 变换成波长，在 VSWR 圆上标出距 V_{min} 线 Δx 的点。正确的 z_r 是容性的。向电源旋转 Δx 使它到达 V_{min} 点。（如果 z_r 是感性的，Δx 将大于四分之一波长，并且 V_{max} 点出现在 V_{min} 点之前。）

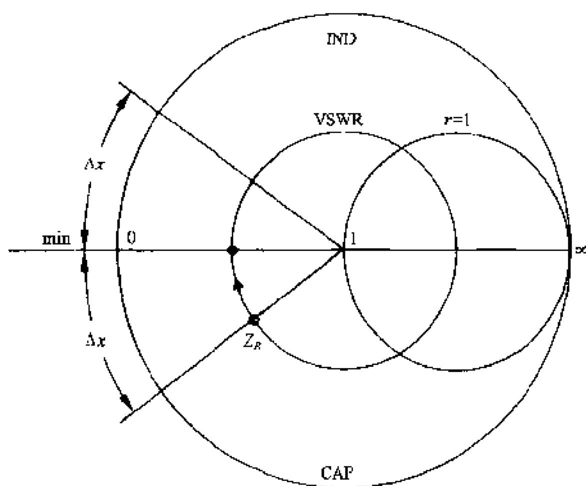


图 15-13

15.10 无损耗线中的瞬变现象

在电路的开关和脉冲操作中，线路上含有电压的突然变化，分析这种瞬变状态通常借助于 15.3 节中的偏微分方程组或它们的拉普拉斯变换。然而，对于无损耗线（$R = G = 0$, $R_0 = \sqrt{L/C}$, $u_p = 1/\sqrt{LC}$）这种特殊情况，可采用建立在多种反射波叠加基础之上的简单图解方法。

图 15-14 给出了无损耗传输线的模型，当 $t = 0$ 时接通激励电压 $v_g(t)$，R_g 是电源的内电阻。于是，经过一段**延时** $t_D = l/u_p$ 后，线路始端的突变对终端产生影响。如果负载与线路不匹配（$R_R \neq R_0$），在终端将发生反射；如果电源也不匹配（$R_g \neq R_0$），在始端也将发生反射。

例3 $t = 0$ 时 $v_g(t)$ 是 10V 的阶跃电压（即直流电压），并且线路两端均匹配（$R_R = R_g = R_0$），瞬变电压的状态由图 15-15 中的**时间-距离曲线**给出。由于电源电压恒定并且在终端处

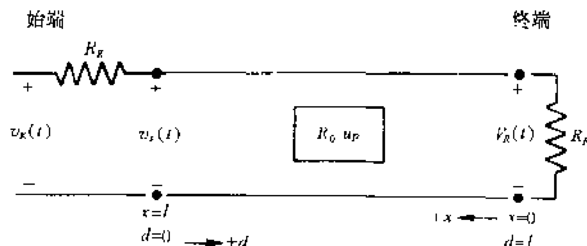


图 15-14

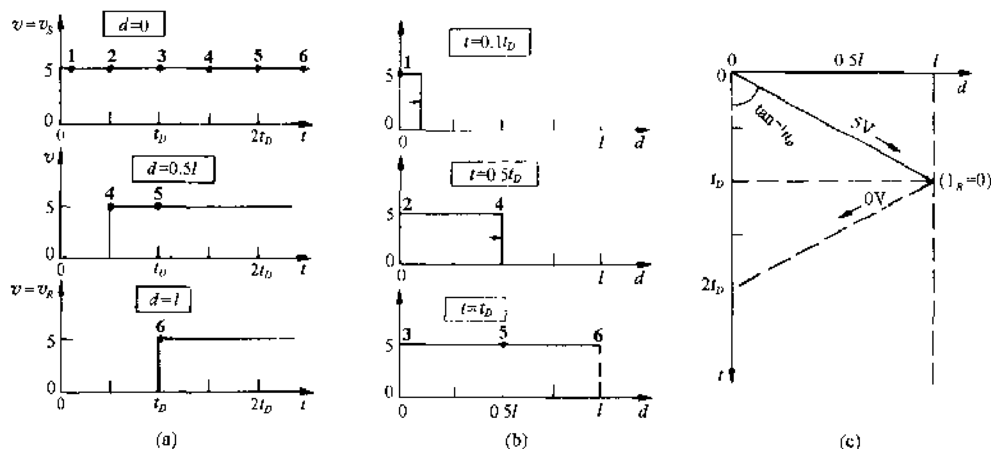


图 15-15

没有反射，所以经过一个延时后系统达到稳定状态 $v(d,t)=5\text{V}$。图 15-15(a)和(b)中，不同的黑体数字表示与稳定状态相对应的不同的空间-时间组合。例如，**5** 表示 $v(0.5l,0.5t_D)=5\text{V}$。

例 4　假定除了负载开路($R_R=\infty$)外，其他条件和例 3 中的相同。图 15-16 给出了时间-距离曲线。由于在负载处只发生了一次反射，所以 $2t_D$ 后均匀稳态电压达 10V。

例 5　如例 3 和例 4 那样，有一条传输线被外源激励，其参数为

$$V_g=20\text{V}(\text{直流}),\quad R_g=3R_0,\quad \Gamma_g=\frac{1}{2},\quad \Gamma_R=1(\text{开路})$$

图 15-17 描述了电压的瞬变过程。由于在线路的两端都发生了反射，所以要获得均匀稳态电压 20V，需无穷大的时间。

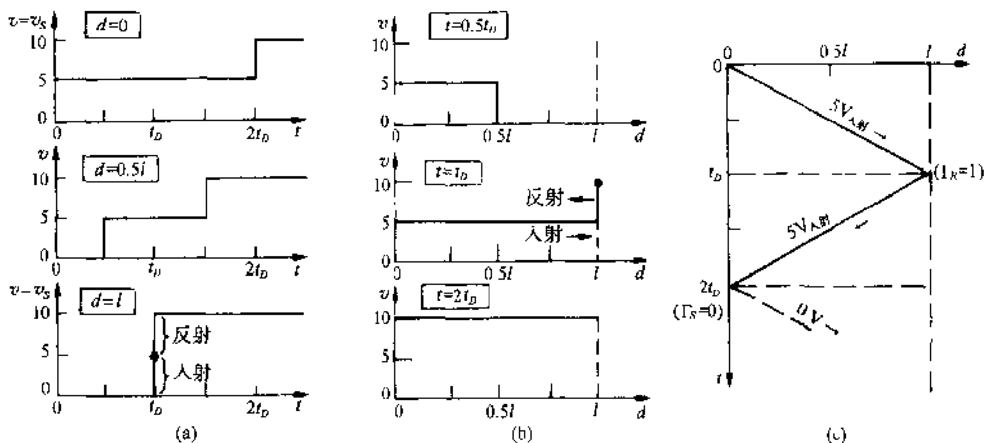
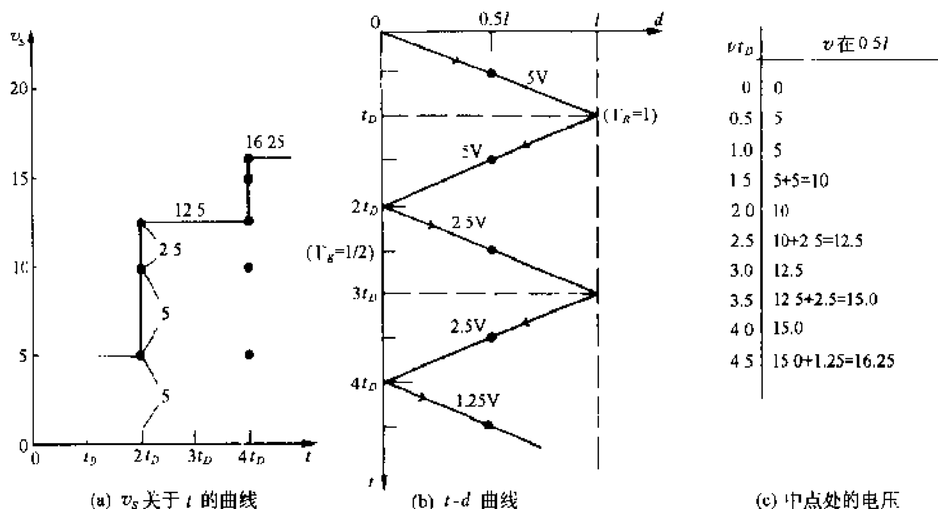


图 15-16



(a) v_S 关于 t 的曲线　　(b) t-d 曲线　　(c) 中点处的电压

图 15-17

习 题 求 解

15.1 在空气中一平行双线传输线由#6铜线(直径为0.162英寸,σ_c 为58MS/m)(美国线规)构成,间距为12英寸。忽略内电感,求每米长线路的 L、C、G、直流电阻 R_d 以及1MHz时交流电阻 R_a 的值。

该平行双线传输线的四个几何因子与两个导体的半径 $a=2.06\times10^{-3}$m 和间距 $d=0.305$m 有关。由于 $d\gg a$,所以

$$\text{GFL}=\ln\left(\frac{d}{a}\right)=5.0,\qquad \text{GFC}=\frac{1}{\text{GFL}}=0.20$$

$$\text{GFR}_d=\frac{2}{a^2}=4.72\times10^5\,\text{m}^{-2},\qquad \text{GFR}_a\doteq\frac{2}{a}\doteq 971\,\text{m}^{-1}$$

对于空气电介质,$\mu_d=\mu_0$,$\epsilon_d=\epsilon_0$;对于铜,$\mu_c=\mu_0$。因此

$$L=\frac{\mu_d}{\pi}\times(\text{GFL})=2.0\ \mu\text{H/m},\qquad R_d=\frac{1}{\pi\sigma_c}\times(\text{GFR}_d)=2.59\times10^{-3}\ \Omega/\text{m}$$

$$C=\pi\epsilon_d\times(\text{GFC})=5.56\ \text{pF/m},\qquad \delta=\frac{1}{\sqrt{\pi f\mu_c\sigma_c}}=66\ \mu\text{m}$$

$$G=0\ \text{S/m},\qquad R_a=\frac{1}{2\pi\delta_c\sigma_c}\times(\text{GFR}_a)=4.04\times10^{-2}\ \Omega/\text{m}$$

15.2 一根刚性空气电介质同轴线用于工作频率为3GHz的雷达装置中,其规格为:铜材料,每隔一段距离有短截线作为支撑,周围是空气电介质;外直径为$\frac{7}{8}$英寸;壁厚为0.032英寸;内导体的直径为0.375英寸;特性阻抗为46.4Ω;衰减为0.066dB/m;最大峰值功率为1.31kW;工作峰值功率为200kW;最低安全波长为5.28cm。确定每米线路的 L、C、G 和 R_a 值,忽略内电感。

内半径 a 为4.76mm,外半径 b 为10.3mm,于是 $\ln(b/a)=0.771$,GFL=0.386,GFC=2.59。从而

$$L=\frac{\mu_0}{\pi}\times(\text{GFL})=0.154\ \mu\text{H/m},\qquad C=\pi\epsilon_0\times(\text{GFC})=71.9\ \text{pF/m}$$

由于材料是铜且频率为3GHz,所以 $\delta=1.2\ \mu$m,于是

$$\text{GFR}_a=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=307\ \text{m}^{-1}\quad 且\quad R_a=\frac{1}{2\pi\sigma_c\delta}\times(\text{GFR}_a)=0.702\ \Omega/\text{m}$$

由于是空气电介质,所以

$$G=0\ \text{S/m}。$$

15.3 对于均匀无损耗线,如果 $\beta=\omega\sqrt{LC}$,验证电压 $v(x,t)=A\cos(\omega t+\theta)e^{j\beta x}$ 满足传输线方程(3)。

对于无损耗线,$R=G=0$,所以方程(3)简化为

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}=LC\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}$$

对于给定的电压,代入上面的方程,得

$$-\beta^2 v=LC(-\omega^2 v)\quad 或\quad \beta=\omega\sqrt{LC}$$

15.4 对于习题 15.1 中的平行双线传输线,求特性阻抗、传播常量(衰减和相移)、传播速度和波长,工作频率为 5kHz。

5kHz 时可以使用直流电阻。这样

$$Z=R_{dc}+j\omega L=2.59\times10^{-3}+j2\pi(5\times10^{3})(2\times10^{-6})$$
$$=6.289\times10^{-2}\angle 87.6^\circ\ \Omega/\text{m}$$
$$Y=G+j\omega C=j2\pi(5\times10^{3})(5.56\times10^{-12})=1.747\times10^{-7}\angle 90^\circ\ \text{S/m}$$
$$Z_0=\sqrt{\frac{Z}{Y}}=600\angle-1.2^\circ\ \Omega$$
$$\gamma=\sqrt{ZY}=1.048\times10^{-4}\angle 88.8^\circ=(2.19\times10^{-6})+j(1.048\times10^{-4})\text{m}^{-1}$$

于是

$$\alpha=2.19\times10^{-6}\ \text{Np/m},\quad \beta=1.048\times10^{-4}\ \text{rad/m},$$
$$u_p=\omega/\beta=2.998\times10^{8}\ \text{m/s},\quad \lambda=2\pi/\beta=59.96\ \text{km}$$

15.5 一条长 10km 的平行双线传输线工作于 100kHz,具有 $Z_0=557\Omega$, $\alpha=2.4\times10^{-5}$Np/m 和 $\beta=2.12\times10^{-3}$rad/m。在 $x=0$ 处 $\hat{V}_R=10\angle0^\circ$V,终端匹配。计算 x 每增加 $\lambda/4$ 处的 $\hat{V}(x)$,并画出相量图。

线路在终端匹配,所以 $\Gamma_R=0$ 和 $\hat{V}(x)=\hat{V}^+e^{\alpha x}\angle\beta x$。又

$$\hat{V}(0)=\hat{V}^+=\hat{V}_R=10\angle0^\circ\text{V}$$

据此

$$\hat{V}(x)=10e^{\alpha x}\angle\beta x(\text{V})$$

对于 $x=n(\lambda/4)(n=0,1,2,\cdots,13,13.48)$,其中 $n=13.48$ 对应于 10km 长,所以

$$\beta x=n\left(\frac{\pi}{2}\text{rad}\right)=n(90^\circ),\qquad \alpha x=\frac{\alpha}{\beta}(\beta x)=n0.0178\ \text{Np}$$

利用这些数据可制成表 15-2。图 15-18 给出了相应的极坐标图。

表 15-2

距负载 $\frac{\lambda}{4}$	$\beta x=\phi_v$ (°)	αx(Np)	$\lvert\hat{V}(x)\rvert$, (V)
0	0	0.0	10.00
1	90	0.0178	10.18
2	180	0.0356	10.36
3	270	0.0534	10.55
4	360	0.0711	10.74
5	450	0.0889	10.93
6	540	0.1067	11.13
7	630	0.1245	11.33
8	720	0.1423	11.53
9	810	0.1601	11.74
10	900	0.1779	11.95
11	990	0.1956	12.16
12	1080	0.2134	12.38
13	1170	0.2312	12.60
13.48	1215	0.24	12.71

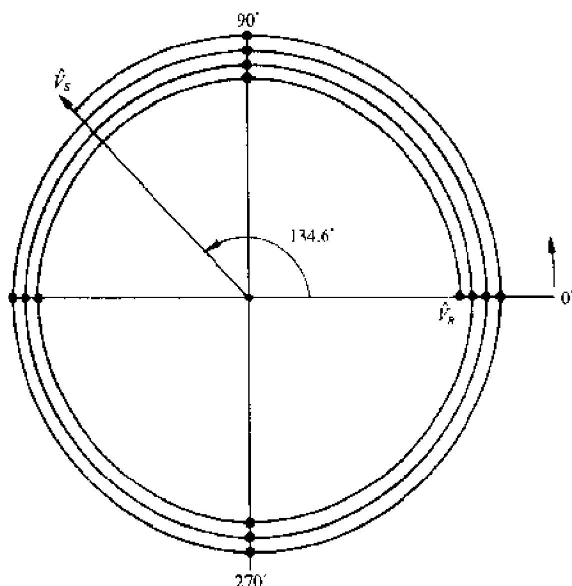


图 15-18

15.6 如果负载不匹配导致 $\Gamma_R = 0.4\angle 0°$，重做习题 15.5，其他数据不变。

解 ☞ 与习题 15.5 相比，本题的电压是入射波和反射波的叠加：

$$\hat{V}(x) = \hat{V}_{inc}(x) + \hat{V}_{refl}(x) = \hat{V}^+ e^{\alpha x}\angle \beta x + \Gamma_R \hat{V}^+ e^{-\alpha x}\angle -\beta x$$

$x=0$ 处的边界条件为(省略物理单位)

$$10\angle 0° = 1.4\hat{V}^+ \angle 0° \quad 或 \quad \hat{V}^+ = 7.14\angle 0°$$

因而

$$\hat{V}(x) = 7.14e^{\alpha x}\angle \beta x + 2.86e^{-\alpha x}\angle -\beta x$$

式中的 α 和 β 已在习题 15.5 中给出，所要求的计算如表 15-3 所示，相应的极坐标图如图 15-19 所示。

表 15-3

距负载 λ/4	αx, Np	$e^{\alpha x}$	βx	$V_{inc}(x)$	$V_{ref}(x)$	$\|V(x)\|$
0	0.0	1.0	0°	7.14∠0°	2.86∠0°	10.00∠0°
1	0.0178	1.018	90°	7.27∠90°	2.81∠−90°	4.46∠90°
2	0.0356	1.036	180°	7.40∠180°	2.76∠−180°	10.16∠180°
3	0.0534	1.055	270°	7.53∠270°	2.71∠−270°	4.82∠−90°
4	0.0711	1.074	360°	7.67∠360°	2.66∠−360°	10.33∠0°
5	0.0889	1.093	450°	7.80∠450°	2.62∠−450°	5.18∠90°
6	0.1067	1.113	540°	7.94∠540°	2.57∠−540°	10.51∠180°
7	0.1245	1.133	630°	8.09∠630°	2.52∠−630°	5.57∠−90°
8	0.1423	1.153	720°	8.23∠720°	2.48∠−720°	10.71∠0°
9	0.1601	1.174	810°	8.38∠810°	2.44∠−810°	5.94∠90°
10	0.1779	1.195	900°	8.53∠900°	2.39∠−900°	10.92∠180°
11	0.1956	1.216	990°	8.68∠990°	2.35∠−990°	6.33∠−90°
12	0.2134	1.238	1080°	8.84∠1080°	2.31∠−1080°	11.15∠0°
13	0.2312	1.260	1170°	9.00∠1170°	2.27∠−1170°	6.73∠90°
13.48	0.24	1.271	1215°	9.08∠1215°	2.25∠−1215°	9.34∠148.5°

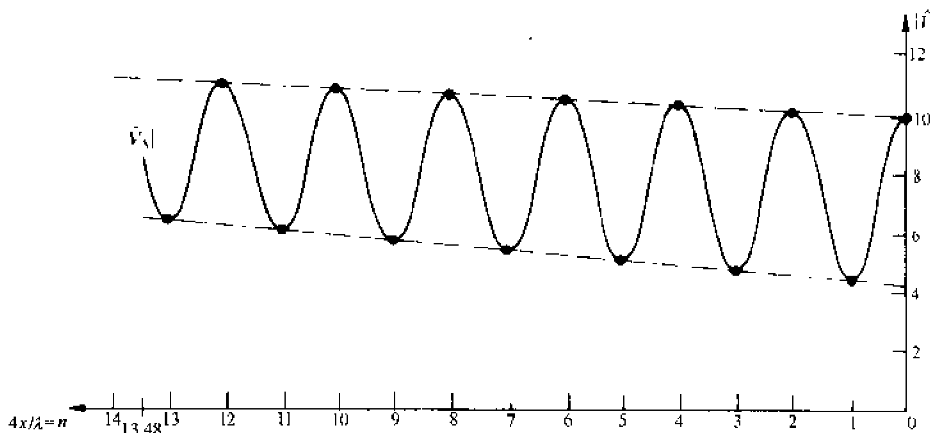


图 15-19

15.7 频率为 5kHz 时测量一条 0.5mi(1mi(英里) = 1609.344m)长的传输线,结果表明特性阻抗为 $94\angle -23.2^\circ\Omega$,总的衰减为 0.06Np,输入和输出之间的相移为 8°。求线路每英里长的 R、L、G 和 C;线路上的相速以及始端功率为 3W 且负载匹配时线路上的功率损耗。

解答 测量所得的衰减为 $\alpha l = 0.06\text{Np}$,据此 $\alpha = 0.12\text{Np/mi}$。相移为 $\beta l = 8^\circ = 0.14\text{rad}$,所以 $\beta = 0.28\text{rad/mi}$。因此

$$\sqrt{ZY} = \gamma = 0.12 + j0.28 = 0.305\angle 66.8^\circ \text{mi}^{-1} \text{ 或 } ZY = 0.093\angle 133.6^\circ \text{mi}^{-2}$$

根据这个结果以及测量所得的值 $\sqrt{Z/Y} = 94\angle -23.2^\circ\Omega$,可求出

$$Z = 28.67\angle 43.6^\circ = 20.8 + j19.8\Omega/\text{mi} = R + j2\pi fL$$
$$Y = 3.24\times 10^{-3}\angle 90^\circ = j3.24\times 10^{-3}\text{S/mi} = G + j2\pi fC$$

由此可知:

$$R = 20.8\Omega/\text{mi},\quad L = 630\mu\text{H/mi},\quad G = 0,\ C = 0.103\mu\text{F/mi}。$$

相速为 $u_p = 2\pi f/\beta = 2\pi(5\times 10^3)/0.28 = 1.12\times 10^5\text{mi/s}$。对于被匹配的负载(无反射),终端的功率为

$$P_R = P_S e^{-2\alpha l} = 3e^{-0.12} = 2.66\text{W}$$

由衰减所引起的功率损耗为 0.34W。

15.8 一条特性阻抗为 600Ω 的传输线长 150m,工作于 400kHz,$\alpha = 2.4\times 10^{-3}\text{Np/m}$ 和 $\beta = 0.0212\text{rad/m}$,供给的负载阻抗为 $Z_R = 424.3\angle 45^\circ\Omega$。求用波长表示的线路长度、$\Gamma_R$、$\Gamma_S$ 和 Z_S。若终端的电压为 $\dot V_R = 50\angle 0^\circ\text{V}$,求 $\dot V_S$ 和线路上电压最大值的位置以及 $|\dot V|_{max}$ 的值。

解答 因为 $\lambda = 2\pi/\beta = 296.4\text{m}$,所以 $l = 150\text{m} = 0.51\lambda$。在 $x = 0$ 处,有

$$\Gamma_R = \frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0} = \frac{300 + j300 - 600}{300 + j300 + 600} = 0.45\angle 116.6^\circ = -0.2 + j0.4$$

因此,在 $x = l$ 处,有

$$\Gamma_S = |\Gamma_R| e^{-2\alpha l}\angle(\varphi_R - 2\beta l) = 0.45e^{-0.72}\angle(116.6^\circ - 363^\circ)$$
$$= 0.22\angle 113.6^\circ = -0.09 + j0.20$$

且

$$Z_S = Z_0\left(\frac{1+\Gamma_S}{1-\Gamma_S}\right) = 600\left(\frac{0.91 + j0.2}{1.09 - j0.2}\right) = 502.7\angle 22.8^\circ\Omega$$

根据 $\dot V_R = 50\angle 0^\circ = \dot V^+(1+\Gamma_R)$,可知 $\dot V^+ = 56.2\angle -26.6^\circ\text{V}$。这样

$$\dot V_S = (\dot V^+ e^{\alpha l}\angle \beta l)[1 + \Gamma_S]$$
$$= (56.2e^{0.36}\angle(-26.6^\circ + 181.5^\circ))(0.91 + j0.2) = 75.0\angle 167.3^\circ\text{V}$$

为了求最大电压的位置 x,画出相量图 15-20。在 $x = 0$ 处,入射电压与反射电压的夹角为 116.6°。当 $\dot V_{inc}$ 逆时针旋转 58.3°,并且 $\dot V_{refl}$ 顺时针旋转相同的角度时,两个相量加在一起就会使电压出现最大值①,此时 $\beta x = 58.3^\circ$ 所对应的距离 x 为 48.2m。电压最大值为

① 用本题的作图法求解电压最大值的位置时,仅适用于无损耗传输线或 α 值很小的传输线。——译者注

$$|\hat{V}|_{max} = 56.2e^{0.116} + (0.45)(56.2)e^{-0.116} = 85.5\text{V}$$

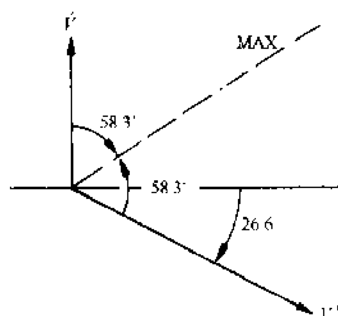


图 15-20

15.9 对于习题 15.2 中给定的同轴线，确定实际的特性阻抗和衰减，并与给定的规格比较；确定用于支撑中心导体的短路短截线的长度，工作频率为 3GHz；根据给定的规格计算这条线路的最高“安全”工作频率。

解 高频低损耗线的特性阻抗为

$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{1.54 \times 10^{-7}}{7.19 \times 10^{-11}}} = 46.33\ \Omega \quad （规格为 46.4\ \Omega）$$

每米的衰减为

$$\alpha = \frac{R_a}{2R_0} = \frac{0.702}{2(46.33)} = 7.58 \times 10^{-3}\text{Np/m} = 0.0658\text{dB/m}（规格为 0.066\text{dB/m}）$$

式中使用了换算 1Np = 8.686dB。

支撑中心导体的短截线必须是 $\lambda/4$ 长的传输线，3GHz 时短截线的长度应为

$$L = \frac{1}{4}\frac{u_p}{f} = \frac{1}{4}\left(\frac{3 \times 10^8}{3 \times 10^9}\right) = 0.025\text{m} \quad 或 \quad 2.5\text{cm}$$

最高“安全”工作频率由给定规格中的最低“安全”波长确定，可求得如下：

$$f_h = \frac{u_p}{\lambda_{low}} = \frac{3 \times 10^8}{5.28 \times 10^{-2}} = 5.68\ \text{GHz}$$

对于高于这个值的频率，除了 TEM 模外还存在其他传播模。

15.10 一条特性阻抗为 70Ω 的高频无损耗线工作于波长为 $\lambda = 80$cm 的频率，$x = 0$ 处的负载为$(140 + j91)\Omega$。利用史密斯图求 Γ_R、VSWR、第一个电压最大值距负载的距离、第一个电压最小值距负载的距离、V_{max}处的阻抗、V_{min}处的阻抗、长为 54cm 线路的输入阻抗和输入导纳。

解 在史密斯图上标出归一化负载 $Z_R/R_0 = 2 + j1.3$，如图 15-21 所示。从圆心过这一点向外边的 λ 圆画一条径向线。从角刻度上读出 Γ_R 的角度为 $\varphi_R = 29°$。测量圆心至 z 点的距离，并且从图的底部刻度上确定 Γ_R 和 VSWR 的大小，其值分别为

$$|\Gamma_R| = 0.50, \quad \text{VSWR} = 3.0, \quad \Gamma_R = 0.5\angle 29°$$

在圆心处过所标出的归一化阻抗画 VSWR 圆。注意此圆与水平线相交于$3 + j0$。VSWR 可用这个交点确定，而不用底部的刻度，因为这个圆表示 VSWR 为常数的圆。过圆心和 z 图右边的开路点作一条径向线，确定 VSWR 圆与这条径向线的交点的位置。这个交点就是电压达最大值（电流达最小值）且阻抗达最大值的点。该点的归一化阻抗为 $3 + j0$，据此得 $Z_{max} = 210 + j0\Omega$。为了求负载至第一

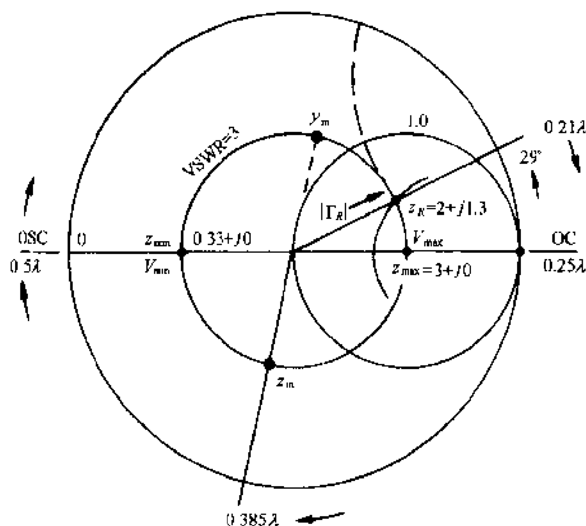


图 15-21

个 V_{max}的距离使用外边刻度(向电源波长),可知参考位置在 0.21λ 处,最大电压线在 0.25λ 处,所以最大电压处与负载间的距离为 0.04λ,即距负载 3.2cm。

从 V_{max}点向电源移动 0.25λ 可确定 V_{min}点的位置。该点的归一化阻抗为 $0.33+j0$,并且 $Z_{min}=23.1+j0\Omega$。负载至第一个电压最小值的距离为

$$0.25\lambda+0.04\lambda=0.29\lambda=23.2\text{cm}$$

为了求输入阻抗,从负载向电源移动 $\frac{54}{80}=0.675\lambda$,读出归一化阻抗。绕圆一周为 0.5λ,所以从外边的刻度上确定距负载为 0.175λ 的点。这个点在 $0.21\lambda+0.175\lambda=0.385\lambda$ 处,过该点画一条径向线,找出它和 VSWR 圆的交点。归一化阻抗为 $0.56-j0.71$,且 $Z_{in}=39.2-j49.7\Omega$。

归一化输入导纳位于图中直径的另一侧,对应于复数的倒数。因为 $z=0.56-j0.71$,所以 $y=0.68+j0.87$,因此

$$Y_{in}=\frac{y}{R_0}=(9.71+j12.4)\ \text{mS}$$

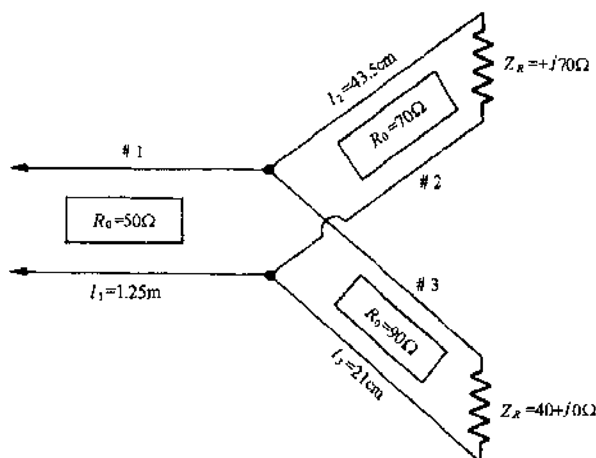


图 15-22

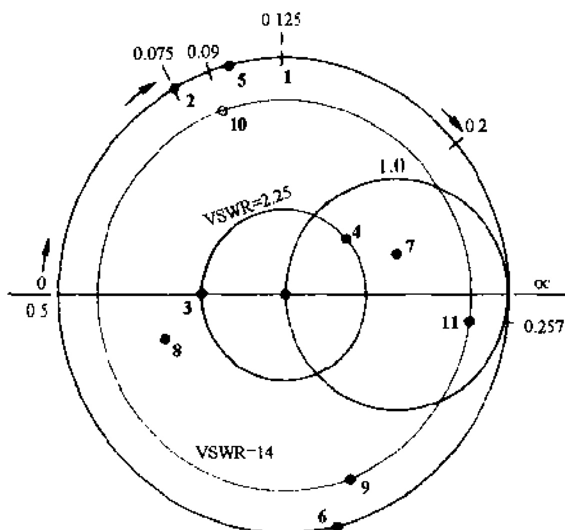


图 15-23

15.11 如图 15-22 所示的高频无损耗传输系统工作于 700MHz,三条线路的相速均为 2.1×10^8m/s。利用史密斯图求每段线路的 VSWR 以及 #1 线路在驱动点处的输入阻抗。(求解三个不同传输线问题。)

■ 三条线路的波长均为 $\lambda=(2.1\times10^8)/(7\times10^8)=30$cm。对于 #2 线路,其长度为$(43.5/30)\lambda=1.45\lambda$,归一化负载为$(0+j70)/70=j1$,在图 15-23 中标出该值作为点 1。记下参考位置 0.125λ

和 VSWR = ∞;在 VSWR 圆上移动向电源 1.45λ 至点 **2**,读出 $z_{in} = 0 + j0.51$。所以,#2 线路的输入阻抗为

$$Z_{in2} = z_{in}R_{02} = 0 + j35.7\Omega$$

这是#1线路负载的一部分。

对于#3线路,其长度为$\frac{21}{30} = 0.7\lambda$,归一化负载为$(40 + j0)/90 = 0.44 + j0$。标出该值作为点 **3**,记下参考位置 0λ 和 VSWR = 2.25;在 VSWR 圆上移动向电源 0.7λ 至点 **4**,并且读出

$$z_{in} = 1.62 + j0.86 \quad 或 \quad Z_{in3} = z_{in}R_{03} = 145.8 + j77.4\Omega$$

这是#1线路的第二部分负载。

对于#1线路,长度为 1.25/0.30 = 4.167λ,负载是 Z_{in2} 和 Z_{in3} 的并联。把各阻抗归一化到 50Ω 线路上,求出各导纳,把它们加起来得到 y_R,然后求得 z_R。求解过程如下:

$$z_2 = j\left(\frac{35.7}{50}\right) = 0 + j0.714(点\mathbf{5}),\ y_2 = 0 - j1.41(点\mathbf{6})$$

$$z_3 = \frac{145.8 + j77.4}{50} = 2.92 + j1.55(点\mathbf{7}), \qquad y_3 = 0.27 - j0.41(点\mathbf{8})$$

$$y_R = 0.27 - j1.55(点\mathbf{9}) \quad 且 \quad \mathrm{VSWR} = 14$$

通过跨直径至点 **10** 求 y_R 的倒数得到 $z_R = 0.1 + j0.63$,参考位置为 0.09λ。此时在 VSWR = 14 圆上从 z_R 移动向电源 4.167λ 至点 **11**,读出 $z_{in} = 9.5 - j6.3$。从而可知#1线路的输入阻抗为

$$50(9.5 - j6.3) = 475 - j315\ \Omega$$

15.12 (a)50Ω 高频无损耗线长 141.6cm,相对介电常量为 $\epsilon_r = 2.49$。500MHz 时测得终端线路的输入阻抗为 $Z_{in} = (20 + j25)\Omega$。利用史密斯图求终端负载的值。(b)测量阻抗后,在距负载 8.5cm 处的线路上并联一个 8 pF 无损耗电容器。求主线路上的 VSWR。

解 (a)由于 $\epsilon_r = 2.49$,所以

$$u_p = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{2.49}} = 1.9 \times 10^8\ \mathrm{m/s}, \qquad \lambda = \frac{u_p}{f} = \frac{1.9 \times 10^8}{5 \times 10^8} = 38\ \mathrm{cm}$$

线路的长度为(141.6/38)λ = 3.726λ。归一化输入阻抗为 $z_{in} = (20 + j25)/50 = 0.4 + j0.5$。在图 15-24 上标出此值作为点 **1**,测量 VSWR,画出 VSWR = 3.2 的圆,记下参考位置向负载 0.418λ。在 VSWR 圆上从 z_{in} 向负载移动 2.726λ(净变化为 0.226λ),并且读出点 **2** 处的归一化负载阻抗 $z_R = 0.72 - j0.98$。500MHz 时的负载阻抗为 $Z_R = (36 - j49)\Omega$。

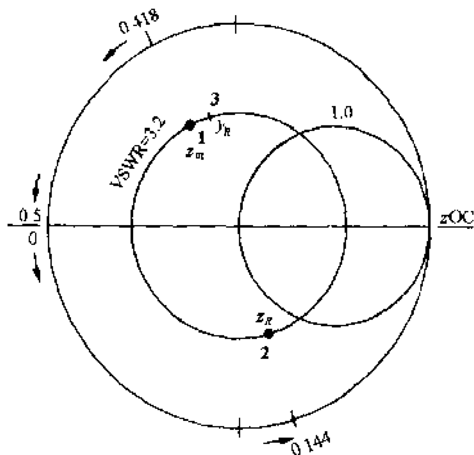


图 15-24

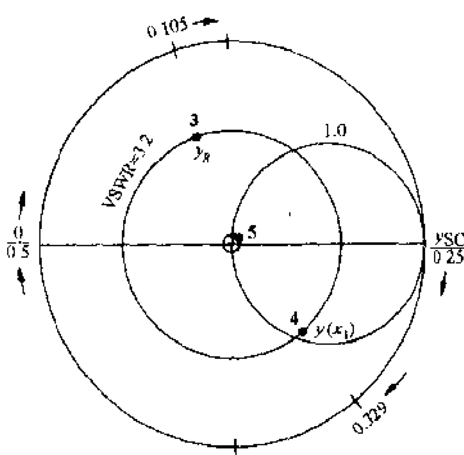


图 15-25

(b) 由于电容器是并联的,所以在图 15-25 的 y 图上求解比较方便。在图 15-24 中背离 z_R 沿直径方向读出 $y_R = 0.48 + j0.67$。在图 15-25 中标出 y_R 作为点 **3**,并且画出 VSWR = 3.2 圆。参考位置向电源 0.105λ,对应于 $x = 0$。在 VSWR 圆上向电源移动 8.5cm 或(8.5/38)λ = 0.224λ,读出点 **4** 处的 $y(x_1)$,即 $y(x_1) = 1.04 - j1.22$。电容器的归一化导纳为

$$y_c = (j2\pi fC)R_0 = j2\pi(5 \times 10^8)(8 \times 10^{-12})(50) = 0 + j1.26$$

x_1 处的新导纳为 $y_s+y(x_1)=1.04+j0.04$。标出这一新导纳作为点 **5**，测量得 VSWR＝1.04（比 3.2 明显减小）。

15.13　一条 4m 长无损耗 300Ω 空气电介质线路（图 15-26）被设计为工作频率 300MHz，带 300Ω 阻性负载，使用 $\lambda/4$ 短截线支撑。若线路工作于 400MHz，线路的尺寸或负载不变，利用史密斯图求包括支撑在内的每段线路的 VSWR 以及新频率下的输入阻抗。

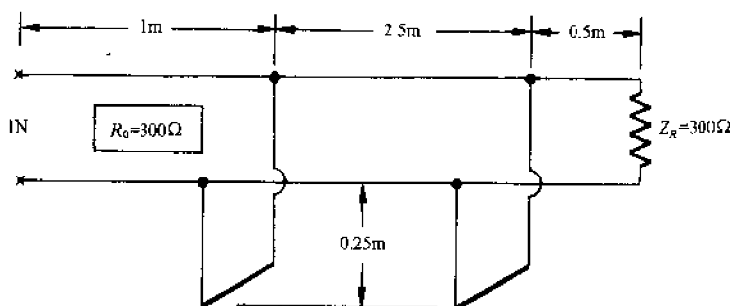


图 15-26

波长为 $\lambda=u_p/f=(3\times10^8)/(4\times10^8)=75\text{cm}$，距离用 λ 表示为

总长＝4m＝5.333λ

负载距短截线 1 的长度＝50cm＝0.667λ

短截线长＝25cm＝0.333λ

短截线的间距＝2.5m＝3.333λ

短截线 2 距输入端的长度＝1m＝1.33λ

由于短截线是并联的，所以可利用图 15-27 的 y 图求解。在 $x=0$ 处，$y_R=R_0/Z_R=1+j0$（点 **1**）和 VSWR＝1。线路的电压在第一根短截线的连接点处下降，连接点距负载 0.667λ，不存在短截线时，$y(x_1)=1+j0$。

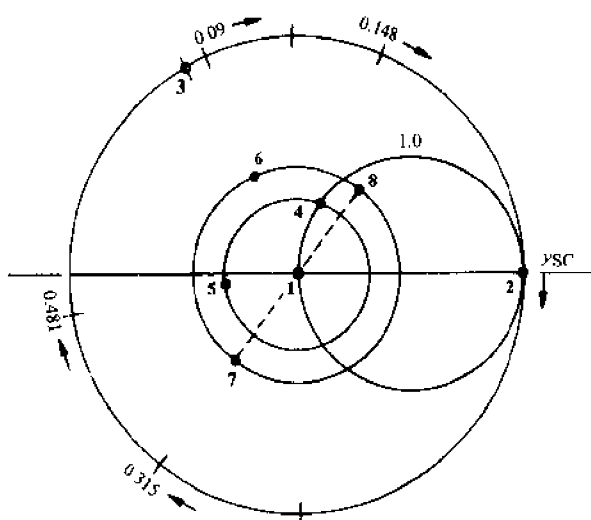


图 15-27

为了求短路短截线的导纳，在点 **2** 处标出 y_{sc}，在 VSWR＝∞圆上移动向电源 0.333λ 至点 **3**，读出 $y=0+j0.58$。由于连接了短截线 1，这个值应加到 $y=1+j0$ 上得到点 x_1 处的导纳，因而，$y(x_1)=1+j0.58$（点 **4**），VSWR＝1.75，参考位置向电源 0.148λ。过点 **4** 画出 VSWR 圆，从点 4 向电源移动 3.333λ 至点 **5**，读出没有短截线 2 时 x_2 处的导纳 $y(x_2)=0.57-j0.08$。这个点处的值加上第二根短截线得到 $y(x_2)=0.57+j0.50$（点 **6**），画出 VSWR＝2.3 圆。参考位置向电源 0.092λ。在 VSWR＝2.3 圆上，从点 **6** 向电源移动 1.333λ 至点 **7**，读出归一化输入导纳 $y_{in}=0.52-j0.38$。通过移至直径的另一端求这个值的倒数，可读出 $z_{in}=1.23+j0.92$（点 **8**）。所以，400MHz 时线路的输入阻抗为 $z_{in}R_0=$

$(369+j276)\Omega$。

15.14 如图15-28所示，用无损耗集总参数网络使50Ω线路和工作于1GHz的RF晶体管的输入端匹配。晶体管对于50Ω系统测量所得的输入反射系数为$\Gamma=0.6\angle-150°$。求满足共轭匹配条件的L和C的值。

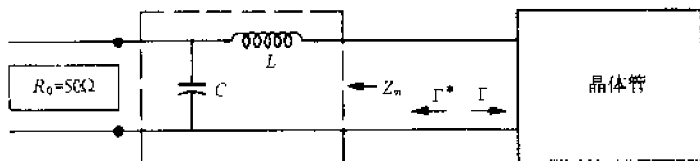


图15-28

解 把匹配网络的电抗归一化到50Ω的线路边，得到$\chi=\omega L/50$和$b=50\omega C$。从晶体管朝网络看过去的归一化阻抗为

$$z_{in}=j\chi+\frac{1}{1+jb} \tag{1}$$

而匹配标准为$\Gamma_R=\Gamma^*$，从而可知

$$z_{in}=\frac{1+\Gamma^*}{1-\Gamma^*}=0.27+j0.25 \tag{2}$$

式(1)和式(2)联立得到$b=\pm1.64$。由于$b=+1.64$，所以可得$\chi=+0.70$，其中b上的正号对应于电容，于是

$$C=\frac{b}{\omega R_0}=5.2\text{ pF}\quad 和\quad L=\frac{\chi R_0}{\omega}=5.6\text{ nH}$$

15.15 一条长15m的300Ω传输线连接到终端接150Ω电阻器的长3m的150Ω传输线上。假定传输线为空气电介质的无损耗线，工作于固定的频率50MHz，求R_0以及用来匹配两线路使得主线路上VSWR=1的$\frac{1}{4}$波长线（$\frac{1}{4}$**波长变换器**）的长度。如果不使用变换器，主线路上的VSWR是多大？

解 系统的模型如图15-29所示。由于$f=50\text{MHz}$和$u_p=3\times10^8\text{m/s}$，所以波长为$\lambda=6\text{m}$，$\lambda/4$线的长度应为1.5m。

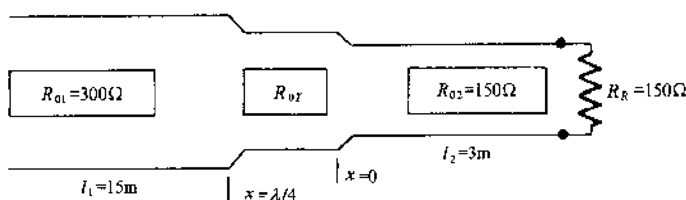


图15-29

原位置没有变换器时，由于线路2的终端是电阻性负载，300Ω线的终端为150Ω。线路1的反射系数为

$$\Gamma=\frac{150-300}{150+300}=-\frac{1}{3}\quad 且\quad \text{VSWR}=\frac{1+\left(\frac{1}{3}\right)}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}=2$$

如图所示，当接入变换器时，负载R_R处的反射系数为

$$\Gamma_R=\frac{R_R-R_{0T}}{R_R+R_{0T}} \tag{1}$$

在$\beta x=90°$处的输入阻抗，即线路1的负载必须是300Ω，即

$$Z_{in}=300\Omega=R_{0T}\frac{1+\Gamma_R\angle-180°}{1-\Gamma_R\angle-180°}=R_{0T}\frac{1-\Gamma_R}{1+\Gamma_R} \tag{2}$$

把式(1)和$R_R=150\Omega$代入式(2)，得到

$$300(150 + R_{0T} + 150 - R_{0T}) = R_{0T}(150 + R_{0T} - 150 + R_{0T})$$

从而解得　　$R_{0T} = \sqrt{300 \times 150} = \sqrt{R_{01}R_{02}} = 212.1\Omega$①

15.16 150MHz 的一台电源激励长 10m 的 75Ω 同轴线，其终端的负载是由长分别为 0.5m 和 1m 的两根 50Ω 线并联组成，并且每根线的终端都接 50Ω 电阻。所有线路都是无损耗的，$\epsilon_r = 2.2$，参考图 15-30。确定一根并联连接的 75Ω 短截线的长度和它的连接点 x_1 的值，使得馈线上产生最小的 VSWR。短截线应尽可能靠近负载。

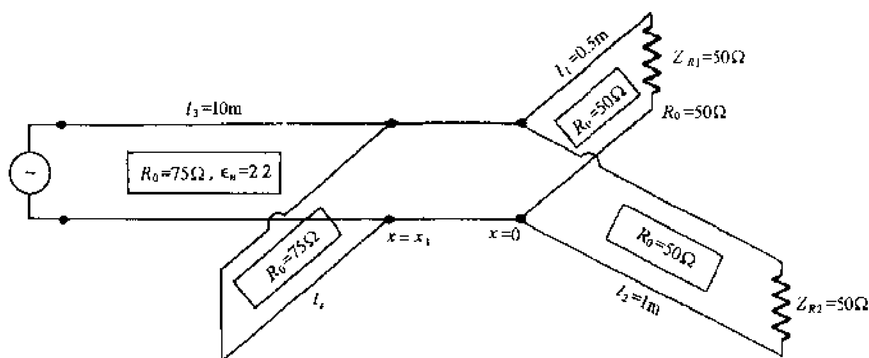


图 15-30

解 相速为 $u_p = 3\times10^8/\sqrt{2.2} = 2.02\times10^8$m/s，波长为 $\lambda = u_p/f = 1.35$m。由于负载为电阻，每根 50Ω 线的输入阻抗为 50Ω，所以 75Ω 线路上的合成负载为 25Ω，归一化后成为 $z_R = 0.333 + j0$。在史密斯图上标出 z_R，并且过该点画出 $|\Gamma_R|$ 圆和指向角度刻度的径向线，如图 15-31 所示，读出 $\varphi_R = 180°$，并测量

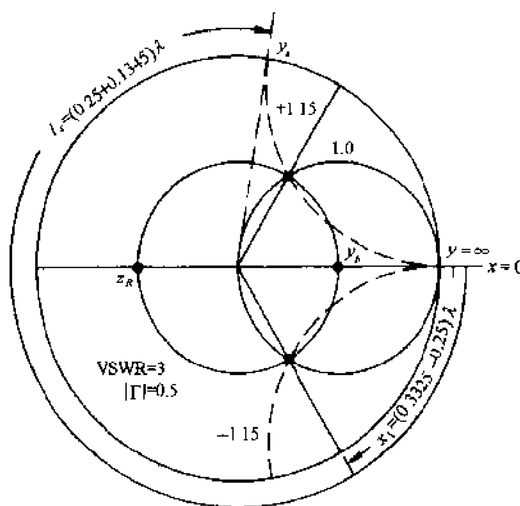


图 15-31

①求 R_{0T} 还有更简单的方法。为了使线路 1 的负载 Z_1 与 R_{01} 的传输线匹配，应使 $Z_1 = R_{01}$。而 Z_1 是从 $\frac{1}{4}$ 波长变换器的始端向终端方向看过去的输入阻抗：

$$Z_1 = R_{0T}\frac{R_R + jR_{0T}\tan\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{4}\right)}{R_{0T} + jR_R\tan\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{4}\right)}$$

上式化简后成为 $Z_1 = \frac{R_{0T}^2}{R_R}$。所以处于匹配状态时，$\frac{1}{4}$ 波长变换器的特性阻抗应为

$$R_{0T} = \sqrt{R_{01}R_R}$$

——译者注

$$|\Gamma| = 0.5 \quad \text{和} \quad \text{VSWR} = 3$$

匹配短截线是并联的，从点 z_R 引出一条直径，在直径的另一端查出 $y_R = 3 + j0$。确定 $g = 1$ 圆和 VSWR = 3 圆的交点并记下距 $x = 0$ 处负载的距离：

$$y = 1 + j1.15 \quad \text{距电源} 0.25 + 0.166 = 0.416\lambda$$

$$y = 1 - j1.15 \quad \text{距电源} 0.3335 - 0.25 = 0.0835\lambda$$

在 $x_1 = 0.0835\lambda = 11.3\text{cm}$ 处放置 75Ω 短截线。为了满足 $y = 1 + j0$（匹配条件），应取短截线的长度 l_s 使 $y_s = 0 + j1.15$，标出 y_s 并确定从短路条件 $y = \infty$ 至此点的距离。从而可知短截线的长度为 $(0.25 + 0.1345)\lambda = 51.9\text{cm}$。

对于被匹配的负载，线路 l_1 和 l_2 上的 VSWR 为 1.0。短路短截线上 VSWR 为无穷大。从 $x = 0$ 至 $x = x_1$ 的主线路上 VSWR 为 3.0，从 $x = x_1$ 至 $x = l_3$ 的主线路上 VSWR 为 1.0。

15.17 600MHz 时，为了匹配负载 $Z_R = (600 + j300)\Omega$，一根短路短截线并联到 300Ω 无损耗空气电介质线路上，求这根短路短截线距负载的最短距离和它的长度（单位均为 m）。匹配短截线与主线路为同一类型的传输线。

解 对于线路和短截线，$u_p = 3 \times 10^8\text{m/s}$ 和 $\lambda = 0.5\text{m}$。在图 15-32 中的 y 图上标出 $z_R = (600 + j300)/300 = 2 + j1$。画出 VSWR = 2.6 圆，沿径向移动至另一端，可知 $y_R = 0.4 - j0.2$，读出参考位置向电源 0.464λ。在 VSWR 圆上从 y_R 移至与 $g = 1$ 圆相交的第一个交点，读出在参考位置 0.162λ 处的 $y(x_1) = 1 + j1$。短截线的位置距负载

$$x_1 = [(0.5 - 0.464) + 0.162]\lambda = 0.198\lambda = 9.9\text{cm}$$

为了匹配线路使 VSWR = 1，短路短截线的导纳应为 $y_s = 0 - j1$ 才能抵消点 x_1 处的电纳，从而可知所要求的短截线的长度为 $0.125\lambda = 6.25\text{cm}$。

如果这个位置无法到达，可使用与 $g = 1$ 圆相交的第二个交点，在该点处，$y(x_2) = 1 - j1$，并且

$$x_2 = [(0.05 - 0.464) + 0.338]\lambda = 0.374\lambda = 18.7\text{cm}$$

必须调整短截线使 $y_s = +j1$，此时短截线的长度为 $0.375\lambda = 18.75\text{cm}$。

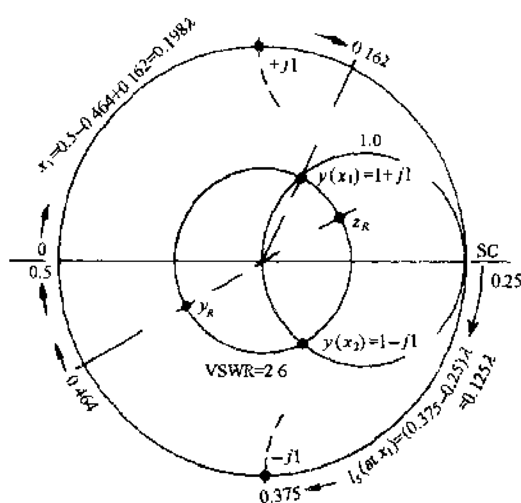


图 15-32

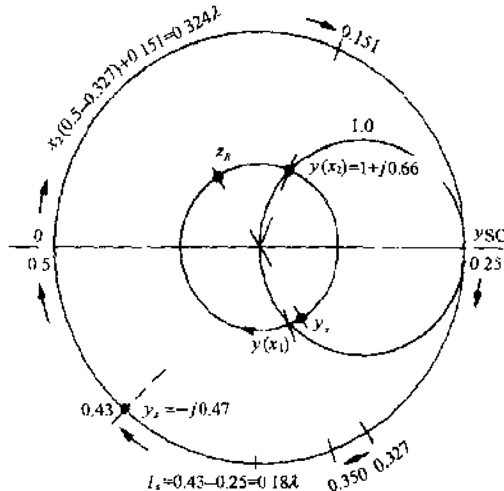


图 15-33

15.18 320MHz 时，一条 $\epsilon_r = 2.1$ 的高频无损耗 70Ω 线路的终端接 $Z_R = 50\angle 30°\Omega$。在线路上并联一段 $\epsilon_r = 2.3$ 的 50Ω 短路线用于匹配负载，短截线距负载至少应有 5cm。如果这种匹配可以实现，求短截线距负载的距离以及它的长度。

解 对于主线路，$u_p = 3 \times 10^8/\sqrt{2.1} = 2.07 \times 10^8\text{m/s}$，$\lambda = u_p/f = 64.7\text{cm}$；对于短截线，$u_{ps} = 3 \times 10^8/\sqrt{2.3} = 1.98 \times 10^8\text{m/s}$，$\lambda_s = 61.9\text{cm}$。归一化负载为 $z_R = (50\angle 30°)/70 = 0.62 + j0.36$，VSWR = 1.92，并且参考位置向电源 $0.327\lambda_m$ 处的导纳为 $y_R = 1.20 - j0.70$，见图 15-33。在 VSWR 圆上从 y_R 向电源移动至第一个交点，其值为 $y(x_1) = 1 - j0.66$，它位于 0.350λ 处，或者移动距离 $0.023\lambda = 1.49\text{cm}$。由于 5cm 的限制，不能使用此交点。在 VSWR 圆上继续移动至 $y(x_2) = 1 + j0.66$，它位于 $0.151\lambda_m$ 处，距离

$$x_2 = (0.5 - 0.327) + 0.151 = 0.324\lambda_m = 21.0\text{cm}$$

给出了短截线的连接点。

由于短截线具有不同的 R_0，所以有必要先对 $y(x_2)$"去归一化"：

$$Y(x_2) = \frac{1 + j0.66}{70} = (1.4 + j0.94) \times 10^{-2}\text{S}$$

这表明为了抵消电纳应取

$$y_s = (-j0.94 \times 10^{-2})(50) = -j0.47$$

于是可知短路短截线的长度为 $(0.43 - 0.25)\lambda_s = 0.18\lambda_s = 11.1\text{cm}$。

15.19 500MHz 时用甚高频电桥测量负载，阻抗为 $29\angle 30°\Omega$。这个负载被连接到 50Ω 空气电介质线路上，负载与线路之间有一 50Ω 的 $3\lambda/8$ 调谐器。求主线路上 VSWR 为 1.0 时每根短路短截线的长度。如果存在两个解，可同时给出。

解 系统模型如图 15-9 所示。对于空气线路，$u_p = 3 \times 10^8$m/s 和 $\lambda = u_p/f = 60$cm，归一化负载阻抗为

$$z_R = \frac{Z_R}{R_0} = 0.58\angle 30° = 0.5 + j0.29$$

在史密斯图上作 $3\lambda/8$ 调谐器圆，标出 z_R，画出 VSWR = 2.25 圆，确定 $y_R = 1.52 - j0.88$ 的位置并找出调谐器圆与 $g_R = 1.52$ 圆的交点。对于每一个交点都存在一个解，首先考虑 $y = 1.52 - j1.82$（图 15-34(a)）。这里，必须调整第一根短截线使电纳由 -0.88 变为 -1.82（点 1）；因而在点 2 处，$y_{s1} = 0 - j0.94$。对于这个 b，短截线的长度从向电源 $y = \infty$ 的 λ 刻度上读出：

$$l_{s1} = (0.380 - 0.25)\lambda = 7.8\text{cm}$$

从点 1 向电源移动 $3\lambda/8$ 至点 3，该处 $y = 1 + j1.53$。短截线 2 必须加上 $y = 0 - j1.53$（点 4），所以短截线的长度为

$$l_{s2} = (0.342 - 0.25)\lambda = 5.52\text{cm}$$

图 15-34(b)给出了第二个解，仿效同样的方式，有

在 1′处：$y = 1.52 - j0.16$

在 2′处：$y_{s1} = 0 + j0.72$　和　$l_{s1} = (0.25 + 0.099)\lambda = 21.6\text{cm}$

在 3′处：$y = 1 + j0.45$

在 4′处：$y_{s2} = 0 - j0.45$　和　$l_{s2} = (0.433 - 0.25)\lambda = 11.4\text{cm}$

第一个解最佳，因为短截线的总长度为 12.63cm，VSWR 为无穷大，在实际系统中，这将产生较低的损耗。

15.20 在距习题 15.19 中的负载 7.2cm 处，采用两根四分之一波长短截线调谐器（50Ω，短路

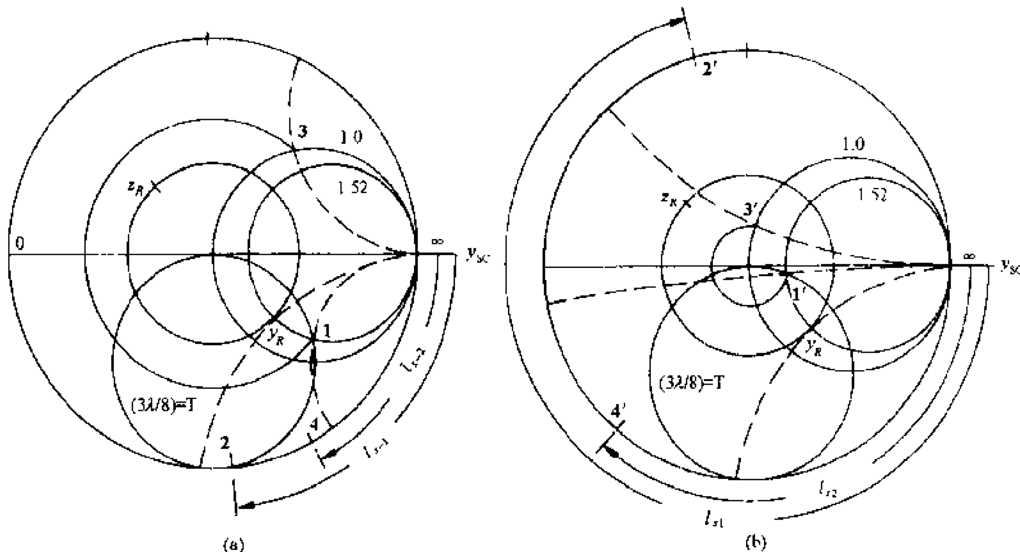


图 15-34

短截线)使负载与线路匹配。

解 习题15.19中的归一化负载导纳为 $y_R = 1/z_R = 1.52 - j0.88$，波长为 $\lambda = 60\text{cm}$。在距负载7.2cm或 0.12λ 处，$y_l = 0.54 - j0.36$，用调谐器使这个值与线路匹配。存在两个解：

解1(图15-35)	解2(图15-36)
$y_1 = 0.54 - j0.36$	$y_2 = 0.54 - j0.36$
1: $y_T = 0.54 - j0.50$	1′: $y_T = 0.54 + j0.50$
2: $y_{s1} = -j0.14$	2′: $y_{s1} = +j0.86$
$l_{s1} = (0.478 - 0.25)\lambda = 13.68\text{cm}$	$l_{s1} = (0.25 + 0.113)\lambda = 21.78\text{cm}$
3: 移动 $\lambda/4$ 至 $y = 1 + j0.95$	3′: 移动 $\lambda/4$ 至 $y = 1 - j0.95$
4: $y_{s2} = -j0.95$	4′: $y_{s2} = +j0.95$
$l_{s2} = (0.3795 - 0.25)\lambda = 7.77\text{cm}$	$l_{s2} = (0.25 + 0.1205)\lambda = 22.23\text{cm}$
总短截线长 = 21.45cm(优先选用)	总短截线长 = 41.01cm

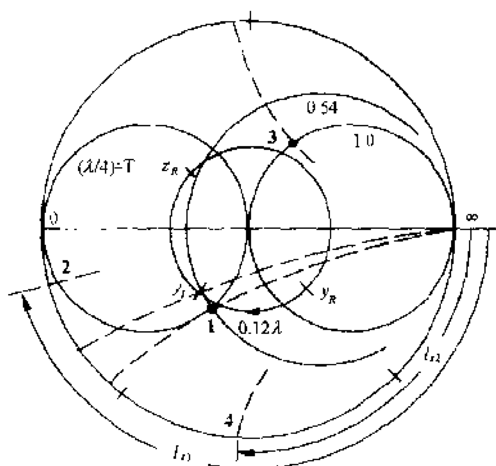


图15-35

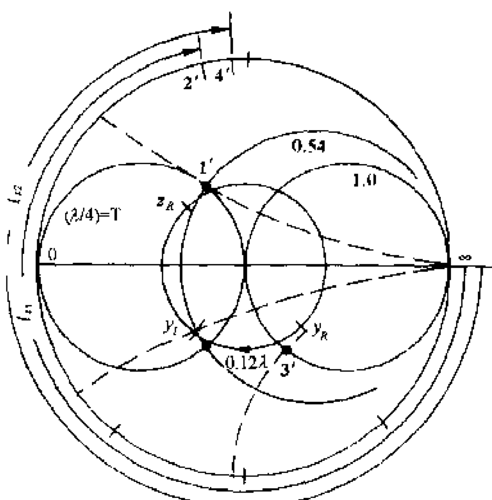


图15-36

15.21 600MHz时，用70Ω双短截线调谐器使负载 $Y_R = (4.76 + j1.43)\text{mS}$ 与70Ω无损耗空气电介质线路匹配。第一根短截线位于负载处，两根短截线的间距为10cm。求满足匹配条件的短路短截线的长度。

解 对于电介质为空气的线路，$\lambda = (3 \times 10^8)/(6 \times 10^8) = 0.50\text{m}$，短截线的间距为 $10\text{cm} = \lambda/5$。作 $\lambda/5$ 调谐器圆如图15-37所示。标出归一化负载 $y_R = Y_R R_0 = 0.33 + j0.10$，由它确定 VSWR = 3.0 圆。存在两个解，一个对应于与调谐器圆的交点 $y_1 = 0.333 - j0.18$(VSWR = 3.2)，另一个对应于 $y_2 = 0.333 + j0.84$(VSWR = 4.9)。

第一个解。长度为 $0.207\lambda = 10.35\text{cm}$，为了把 y_R 变为 y_1，应使 $y_{s1} = -j0.28$。在 VSWR = 3.2 圆上从 y_R 向电源移动 0.2λ 至 $y = 1.0 + j1.23$。为了满足 $y = 1 + j0$ 这一匹配条件，必须调整第二根短截线使 $y_{s2} = -j1.23$。此时长度为 $0.109\lambda = 5.45\text{cm}$。

第二个解。由于 $y_2 = 0.33 + j0.84$ 和长度 $0.351\lambda = 17.55\text{cm}$，所以 $y'_{s1} = +j0.74$。在 VSWR = 4.9 圆上从 y_R 向电源移动 0.2λ 至 $y' = 1.0 - j1.75$。为了产生 $1 + j0$ 这一匹配条件，必须调整第二根短截线使 $y_{s2} = -j1.75$。此时长度为 $0.417\lambda = 20.85\text{cm}$。

15.22 600MHz时一根长40cm的50Ω开槽线插入为天线供电的50Ω无损耗线中。终端短路并且天线在原位置，测量驻波得到图15-38中的数据，开槽线上的刻度在负载边具有最小值。求天线的阻抗、负载的反射系数和线路上的传播速度。

解 由于短路，相邻电压最小值之间相距半个波长，所以 $\lambda = 50\text{cm}$。频率为600MHz时，相速为 $u_p = f\lambda = 3 \times 10^8\text{m/s}$(空气电介质)。根据天线的位置，最小值向电源移动 $5\text{cm} = 0.1\lambda$。在史密斯图上作出 VSWR = 2.2 圆，并且确定电压最小值线如图15-39所示。在 VSWR 圆上 z_R 距 V_{min} 向负载 0.1λ：

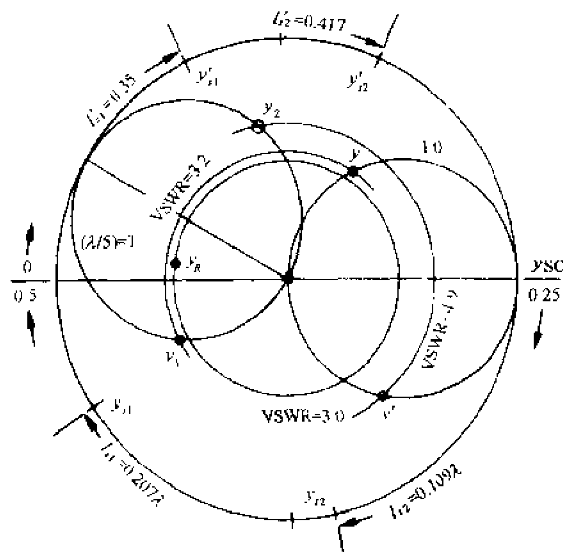


图 15-37

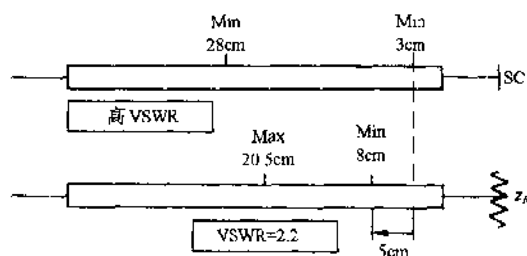


图 15-38

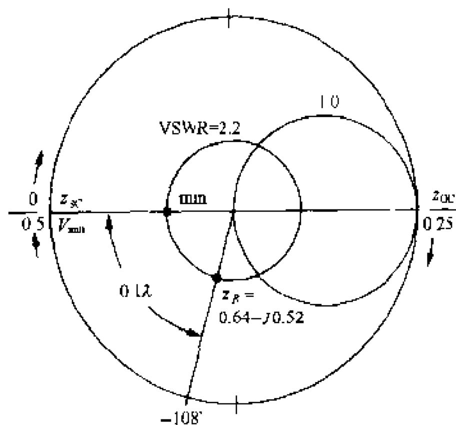


图 15-39

$$z_R = 0.64 - j0.52$$

$$Z_R = R_0 z_R = (32 - j26)\Omega$$

从图中读出负载的 Γ_R：$\varphi_R = -108°$ 和 $|\Gamma_R| = 0.375$。$|\Gamma_R|$ 是圆心到 z_R 的距离，它可从外部刻度读出。

15.23 一条长 40m 的无损耗 50Ω 同轴电缆的相速为 2×10^8m/s，$t=0$ 时连接到 $v_g(t)=18$V（直流）和内阻为 $R_g=100\Omega$ 的电源上。如果终端短路，画出始端电压 $v_S(t)$ 的草图，时间从 $t=0$ 至 $t=2.5\mu$s。

解 线路的延时为

$$t_D = \frac{l}{u_p} = \frac{40}{2\times10^8} = 0.2\mu\text{s}$$

$t=0$ 时始端的入射电压为

$$v_S(0)=\frac{v_g R_0}{R_g+R_0}=\frac{18\times 50}{100+50}=6\text{V}$$

两端的反射系数为

$$\Gamma_g=\frac{R_g-R_0}{R_g+R_0}=\frac{100-50}{100+50}=+\frac{1}{3}\quad 和\quad \Gamma_R=\frac{R_R-R_0}{R_R+R_0}=\frac{0-50}{0+50}=-1$$

图15-40给出了总时间 $2.5\mu s=12.5t_D$ 内的时间-距离曲线。根据此曲线容易得到所要求的 v_S-t 曲线，见图15-41。在任何时刻，v_S 是所有入射波和反射波的累加，一直累加到最后产生的入射波。例如

$$v_s(4.01t_D)=6-6-2+2+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

由于 $\Gamma_R=-1$，所以在最后一个入射波以后的波将成对抵消。

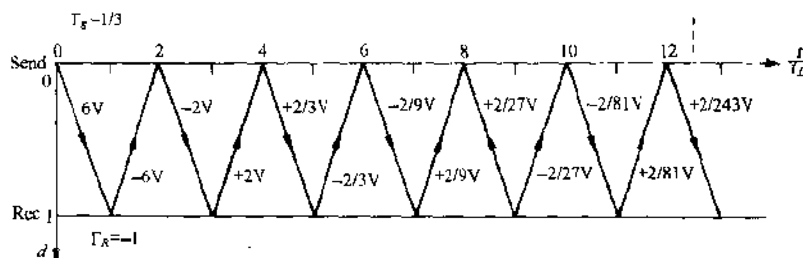


图15-40

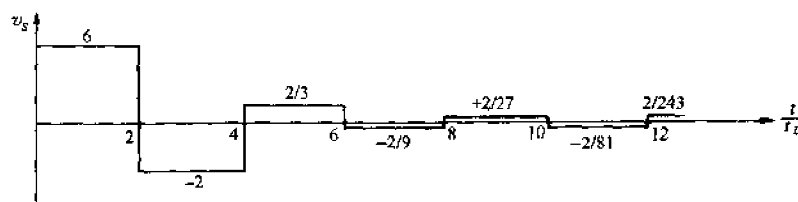


图15-41

15.24 恰当设计的100Ω无损耗100μs延迟线，$t=0$ 时在输入端被间隔周期为2ms的10μs矩形脉冲激励100μs后，输出端产生一个稳定的10μs脉冲。电源具有9V的峰值开路输出，内阻为50Ω。如果终端是50Ω电阻器，画出 $v_S(t)$ 和 $v_R(t)$ 的图形，时间从 $t=0$ 至 $t=650\mu s$。

解 $t=0$ 时始端的入射电压是10μs宽度的脉冲，其峰值为

$$V_{inc}=\frac{(9)(100)}{50+100}=6\text{V}$$

始端和终端的反射系数为

$$\Gamma_g=\frac{R_g-R_0}{R_g+R_0}=\frac{50-100}{50+100}=-\frac{1}{3}\quad 和\quad \Gamma_R=\frac{R_R-R_0}{R_R+R_0}=\frac{50-100}{50+100}=-\frac{1}{3}$$

由于脉冲周期是2000μs，所以在图15-42的时间-距离曲线中只需要考虑 $t=0$ 时发出的脉冲，它仅包括前650μs。把习题15.23中所描述的累加法应用于图15-42就得到所要求的电压曲线，见图15-43。

对于正常工作的延迟线，终端必须接电阻 $R_0=100\Omega$。

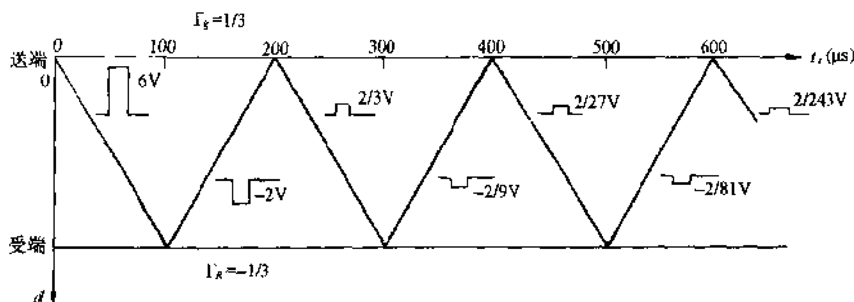


图15-42

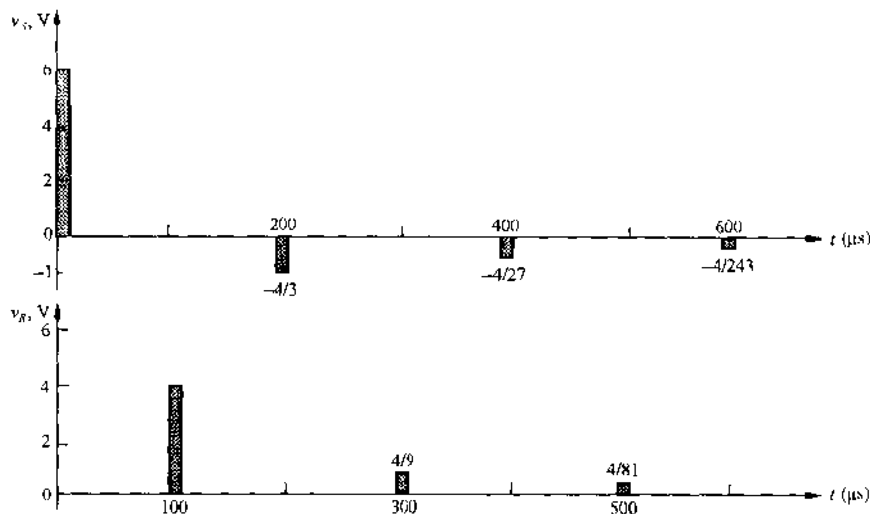


图 15-43

补 充 习 题

15.25 一条同轴电缆的内半径为 $a = 0.5$mm，外半径为 $b = 3$mm，外壁的厚度为 $t = 0.4$mm，用 $\varepsilon_r = 2.0$、$\sigma_d = 10\mu$S/m 的电介质材料填充。导体的电导率为 $\sigma_c = 50$MS/m。计算每米长电缆的 L、C、G、R_d 和 50MHz 时 R_a 的值，忽略内电感。

答案：0.358μH/m，62.0pF/m，35.1μS/m，0.030Ω/m，0.743Ω/m

15.26 在空气中，由美国线规 #12 铜线（直径为 0.081 in.，σ_c 为 52.8MS/m）构成的平行双线传输线相距 4 英寸，求每米长传输线的 L、C、G 和 R 的值。工作频率为 100kHz。

答案：1.84μH/m，6.05pF/m，0，$R_a = 0.0268\Omega$/m

15.27 在“双向”传输线中，二平行铜线（σ_c 为 50MS/m）相距 0.625 in.，埋于 $\varepsilon_r = 2.4$ 的低损耗电介质中。忽略损耗，确定导体的直径使特性阻抗为 300Ω。对于导体的这一尺寸，求直流电阻和 100MHz 时的交流电阻。

答案：0.026 in = 0.66mm，0.117Ω/m，2.72Ω/m

15.28 一高频装置采用铜导体的同轴电缆，其内导体的直径为 0.8mm，外导体的直径为 8.0mm。电介质材料具有 $\varepsilon_r = 2.35$，外导体的厚度远大于工作频率时的透入深度。工程师想要使用一种具有相同 R_0 的新电缆，但是它具有更大的外导体使得 $b_2 - a = 1.5(b_1 - a)$。求新电缆的 ε_r，并计算每根电缆每米长的 R_0 和电容。

答案：3.18，90Ω，56.8pF/m（原电缆），66.1pF/m（新电缆）

15.29 对于习题 15.28 中的同轴电缆，计算线路的特性阻抗 Z_0、α、β、u_p 和 λ，工作频率为 10kHz。

答案：32.7∠15.2°Ω，1.04×10^{-3}Np/m；4.2×10^{-4}rad/m，1.49×10^{8}m/s，14.9km

15.30 求习题 15.26 中的平行双线传输线的特性阻抗、传播常数、传播速度和波长。

答案：552.5∠−0.65°Ω，$(2.4+j210)10^{-5}\text{m}^{-1}$，$2.99\times10^{8}$m/s，2.99km

15.31 一条传输线长 2 mi，工作于 10kHz，具有参数 $R = 30\Omega$/mi、$C = 80$nF/mi、$L = 2.2$mH/mi 和 $G = 20$nS/mi。求特性阻抗、每英尺长的衰减、每英尺长的相移、相速和波长。当始端功率为 1.2W 时，被匹配的负载所吸收的功率是多大？

答案：167.7∠−6.1°Ω，0.0896 Np/mi，0.838 rad/mi，7.5×10^{4}mi/s，7.5mi；838.6mW

15.32 一条传输线长 250m，工作于 2kHz，负载阻抗为 200Ω。线路的参数为 $Z_0 = 300\angle0°\Omega$、$\alpha = 4\times10^{-4}$ Np/m、$\beta = 0.06$ rad/m。如果始端电压为 30∠0°V，求终端电压、负载功率、始端电流和功率、负载的反射功率。

答案：22∠−130°V；　1.21W；　105.4∠18.3°mA，　1.5W；50mW

15.33 确定线路特性的一种方法是测量 $z = l$ 处（线路与电源断开）的输入阻抗，当始端开路时为 Z_{OC}，短路时为 Z_{SC}。根据 $Z_{OC}\cdot Z_{SC}$ 和 Z_{OC}/Z_{SC} 可计算单位长度的特性阻抗和传播常数。如果对于 2mi 长的线路在 5kHz 时的测量值为 $Z_{OC} = 141.9\angle-84.1°\Omega$ 和 $Z_{SC} = 62.0\angle37.7°\Omega$，利用关于输入阻抗 Z_S 的方程求 Z_0、α（每英尺）和 β（每英尺）。

答案：$93.8\angle-23.2°\Omega$，0.12Np/mi，0.28rad/mi

15.34 一条长200m的300Ω传输线工作于200kHz，具有 $\alpha=2.5\times10^{-3}$Np/m、$\beta=0.02$ rad/m。如果 $\dot{V}_R=20\angle0°$ V且 $Z_R=350\angle20°\Omega$，求从终端至第一个阻抗最小值的距离。这个 Z_{min} 的值是多大？

答案：107.2m，239.4Ω

15.35 一条500Ω线路被连接到额定开路电压为 $80\angle0°$V、内电阻为600Ω的10kHz发电机上。线路长3mi，10kHz时 $\alpha=0.05$Np/mi、$\beta=0.9$rad/mi。对于 $x=0$ 处被匹配的负载，求始端功率、终端功率和 $\dot{V}_R$。如果线路在终端开路，始端的功率是多大？

答案：1.32W，0.98W，$31.3\angle-154.7°$V；0.65W

15.36 对于习题15.35中的线路，如果线路在 $x=0$ 处短路，求终端电流和始端功率。

答案：$0.12\angle-157.6°$A，0.55W

15.37 习题15.2和15.9中的刚性同轴线路可被认为是低损耗线路。(a) 如果负载是40Ω电阻器，负载处的反射系数和VSWR是多大？(b) 确定最大和最小负载阻抗使VSWR=1.5。(c) 如果 $Z_R=(55+j0)\Omega$，计算距负载3cm处的反射系数(考虑衰减)。

答案：(a) −0.073，1.16；(b)69.45Ω，30.89Ω；(c)$0.0856\angle-216°$

15.38 对于一条90Ω无损耗高频同轴线路，$\epsilon_r=2.1$，工作于150MHz，令人感兴趣的是VSWR关于终端电阻小变化的敏感度。(a) 对于 n 从0至5的整数值，列出对应于 $R_R=(90\pm2n)\Omega$ 的 Γ_R 和VSWR的表。(b) 如果使用的线路限制VSWR最大为1.025，求终端电阻的最大值和最小值。

答案：(a)见表15-4；(b) 92.24Ω，87.81Ω

表 15-4

n	R_R	Γ_R	VSWR
0	90	0.0	1.0
1	92	0.0110	1.022
	88	−0.0112	1.023
2	94	0.0217	1.044
	86	−0.0227	1.046
3	96	0.0323	1.067
	84	−0.0345	1.071
4	98	0.0426	1.089
	82	−0.0465	1.098
5	100	0.0526	1.111
	80	−0.0588	1.125

15.39 对于习题15.38中的传输线，(a) 求相速、波长和每米长的相移，(b) 如果终端电阻为100Ω，求线路长为 $\lambda/2$、$\lambda/4$ 和 $\lambda/8$ 时的输入阻抗。

答案：(a) 2.07×10^8m/s，1.38m，4.55rad/m

(b) $100\angle-0°\Omega$，$81\angle-0°\Omega$，$90\angle-6°\Omega$

15.40 对于数据对(Z_R，R_0)(单位是Ω)：(100+j150，50)，(28−j35，70)，($90\angle-30°$，90)，(120<90°，50)，(0，70)，(50+j5，50)，利用史密斯图求(a) Γ_R，(b) VSWR，(c) y_r。

答案：(a) $0.75\angle26.5°$，$0.53\angle-121°$，$0.27\angle-90°$，$1.0\angle45°$，−1.0，$0.05\angle90°$

(b) 7，3.3，1.75，∞，∞，1.1

(c) 0.16−j0.225，0.97+j1.23，0.87+j0.52，−j0.415，∞，1−j0.1

15.41 对于数据对(Γ_R，R_0)：($0.5\angle60°$，50Ω)，($1\angle-80°$，90Ω)，($0.1\angle0°$，70Ω)，($-0.6\angle-30°$，50Ω)，(0.8+j0.4，70Ω)，求(a)y_R，(b)VSWR，(c)Y_R(单位：mS)。

答案：(a) 0.44−j0.495，0+j0.84，0.83+j0，2.0−j1.85，0.06−j0.238，

(b) 3.0，∞，1.2，4.0，17

(c) 8.8−j9.9，0+j9.3，11.9+j0，40−j37，0.86−j3.4

15.42 一条无损耗高频线路长3m，$R_0=50\Omega$，$\epsilon_r=1.9$，工作于350MHz。线路上的VSWR为2.4，第一个电压最大值距负载7cm。利用史密斯图求负载阻抗、终端反射系数、第一个电压最小值的位置以及输入阻抗。

答案：(40+j39)Ω，$0.42\angle81°$，22.6cm，(22.3−j11)Ω

15.43 一条70Ω无损耗线路长2.5m，$\epsilon_r=2.2$，工作于625MHz。线路上的VSWR为1.7，第一个电压最小值距

负载 5cm，利用史密斯图求负载导纳、$x=0$ 处的反射系数和线路的输入导纳。

答案：$(10.4+j5.4)$mS，$0.27\angle-68°$、$(16-j7.9)$mS

15.44 一条具有 $R_0=150\Omega$ 的空气电介质线路终端接 $(150-j150)\Omega$ 的负载，工作频率为 75MHz。(a) 利用史密斯图求线路的最短长度使输入阻抗为 $(150+j150)\Omega$。(b) 线路上的 VSWR 和负载处的反射系数分别是多大？(c) 使 $Z_{in}=R+j0$ 的最短线路长度是多大？R 的值是多大？

答案：(a)1.3m；(b) 2.6, $0.47\angle-64°$；(c)64.8cm，57Ω

15.45 两条传输线在输入端并联到 250MHz 的电源上。每条线路长 2m，终端均为 70Ω 的电阻。线路 #1 具有 $R_0=50\Omega$，$\varepsilon_r=1.9$，线路 #2 具有 $R_0=90\Omega$，$\varepsilon_r=2.3$。利用史密斯图求并联后的输入阻抗（注意结合两条线路的输入阻抗/导纳）。

答案：$(24.6+j3.5)\Omega$

15.46 一条无损耗 50Ω 的线路长 105cm，相速为 2.5×10^8m/s，500MHz 时终端接 $Y_R=(20-j16)$mS 的负载。如图 15-44 所示，长为 17.85cm，同样具有 $R_0=50\Omega$ 的短路线跨接于 Y_R 两端。利用史密斯图求主线路上的 VSWR 和输入阻抗。短路线的等值电容（或电抗）是多大？

答案：1.0，50Ω；5.1pF

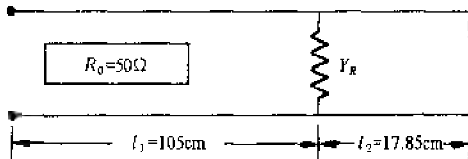


图 15-44

15.47 在习题 15.46 的线路中，跨接上的短路线不小心变成了开路。利用史密斯图求主线路上的 VSWR 和输入阻抗。

答案：6.2，$(26.5+j72.5)\Omega$

15.48 一条平行双线传输线属于习题 15.1 中介绍的类型，工作于 20MHz，通过负载处连接 $\frac{1}{4}$ 波长匹配变换器为 500Ω 的电阻性负载提供能量。忽略主线路和变换器部分的损耗。(a) 为了匹配，计算变换器线路的长度和特性阻抗。(b) 如果主线路和变换器使用相同尺寸的金属线，求匹配所要求的间距 d。

答案：(a) $l_T=3.75$m，$R_{0T}=547.7\Omega$；(b) $d_T=7.77$in

15.49 一条无损耗 70Ω 线路的终端负载为 $Z_R=60.3\angle30.7°\Omega$，频率为 280 MHz。利用史密斯图求与负载并联的电感的值或电容的值，使线路上 VSWR 为最小。如果 $\varepsilon_r=2.1$，多长的短路线（单位：cm）才能达到所要求的值？

答案：$C=4.8$pF($\mathrm{VSWR}_{min}=1.0$)；24.8 cm

15.50 200 MHz 时，一条 200Ω 的空气电介质线路的终端接 $Y_R=(3.3-j1.0)$mS。(a)利用史密斯图求 VSWR 和距负载的最近位置，在那里归一化导纳的实部为 1。(b)在这一点上应连接多大的电纳（单位：mS）才能使线路上 VSWR = 1。

答案：(a) 1.65 cm，29.3 cm；(b) −2.55（感性）

15.51 150 MHz 时，两个 72Ω 电阻性负载作为终端并联于一条 120Ω 空气电介质无损耗线路上。为了匹配线路使 VSWR = 1.0，求并联连接的单根短路短截线距负载的最近位置以及它的长度。

答案：16 cm，78.6 cm

15.52 (a)在习题 15.51 中，如果可调节的短路短截线的最大长度为 50 cm，负载与线路是否匹配？(b)如果(a)的答案肯定，求满足匹配条件的短截线的位置及长度。(c)如果短截线在原始位置不动且调到 50 cm 的最大长度，线路上的 VSWR 是多大？

答案：(a)匹配；(b) 83.8 cm，21.4 cm；(c) 3.3

15.53 一条 $\varepsilon_r=1.8$、工作于 280 MHz 的 90Ω 无损耗线路终端接有负载，线路上有单根短路短截线使终端匹配，使 VSWR = 1.0，短截线距负载 15.8 cm 且长度为 10 cm。求终端阻抗的欧姆值。（提示：移走 y_S，求 VSWR，再向负载移回 y_S）。

答案：$201.2\angle26.6°\Omega$

15.54 120 MHz 时，一条 50Ω 空气电介质无损耗线路具有 $Z_R=(25-j30)\Omega$。可调节长度的短路短截线距负

载 45cm(固定位置)。为了实现主线路上的最佳匹配,求短截线的长度。线路上的最小 VSWR 是多大?

答案:96 cm,1.08

15.55 (a) 一条空气电介质无损耗 70Ω 线路 600 MHz 时通过并联的短路短截线与 140Ω 的负载匹配。为了满足匹配条件,求短截线距负载的最近距离以及它的长度(单位均为 cm)。(b) 现在让线路工作于 220MHz,不改变短截线的位置和长度,求在新频率下主线路上的 VSWR。

答案:(a) 22.65 cm, 22.80 cm; (b) 1.22

15.56 一条 90Ω 无损耗空气电介质线路 600 MHz 时其终端是 $Z_R=(270+j0)\Omega$。为了匹配,连接一个双短截线 0.25λ 调谐器,其中第一条短截线在负载处。求短路短截线的长度(两个解)。哪个解优先选用?

答案:9 cm 和 4.95 cm(优先选用);另外还有 16 cm 和 20.05 cm

15.57 为了使 400 MHz 时的 $Z_R=(50-j50)\Omega$ 与 50Ω 无损耗空气电介质线路匹配,在负载处连接一个 3λ/8 调谐器。求短路短截线长度的两个解,并指出优先选用的解。

答案:4.5 cm 和 4.3 cm(优先选用);另外还有 12.1 cm 和 26.1 cm

15.58 一条 50Ω 空气电介质线路,470 MHz 时的负载为 $Y_R=(0.024-j0.02)$S,具有一个 λ/4 调谐器,其中第一条短截线距负载 7cm。求使负载与线路匹配的短路短截线长度的两个解,并指出优先选用的解。

答案:14.5 cm 和 7.6 cm(优先选用);另外还有 23.1 cm 和 24.3 cm

15.59 一个双短截线 3λ/8 调谐器由 $\varepsilon_r=2.0$ 的 70Ω 线路构成,272 MHz 时用于带一定负载的同类型线路上。为了满足匹配条件,负载处的短路短截线的长度为 4.76cm,另一条短路短截线的长度为 4.60cm。求在工作频率下负载阻抗的欧姆值。

答案:$(58.1-j58.1)\Omega$

15.60 300 MHz 时,225Ω 电阻性负载被匹配到 90Ω 空气电介质线路上。匹配采用两根相距 30 cm 的短路短截线,其中第一根短截线连于负载处。求短截线的长度(两个解),并指出优先选用的解。

答案:13.6 cm 和 8.5 cm(优先选用);另外还有 28.1 cm 和 37.5 cm

15.61 用一条 50Ω 开槽线测量 750 MHz 时的无损耗 50Ω 线路上的负载阻抗。当线路终端短路时,高 VSWR 在 30 cm 和 10 cm 处具有相邻的最小值(刻度在负载边具有低数字)。连接 Z_R 后,VSWR 为 3.2,最小值位于 13.2 cm 处且相邻最大值位于 23.2 cm 处。求在工作频率下 Z_R 的欧姆值。

答案:$31.24\angle-50.2°\Omega$

15.62 求 90Ω 空气电介质传输线系统的负载阻抗和工作频率,该系统用开槽线测量的结果如下:

负载:VSWR = 1.6,电压最小值位于 10 cm 处(高数字位于负载边)。

短路:VSWR > 100,最小值位于 40 cm 处,最大值位于 10 cm 处。

答案:144Ω; 250 MHz

15.63 用一条 50Ω 开槽线测量 625 MHz 时的 50Ω 无损耗同轴线路的负载阻抗。终端短路时,发现相邻的电压最小值位于 10 mm 和 250 mm 处(高数字位于负载边)。如果连接负载,VSWR > 100 且最小值出现在 172.7 mm 处。求负载阻抗的欧姆值。

答案:80Ω(容性)

15.64 为了使负载与 517 MHz 时的 50Ω 无损耗空气电介质线路匹配,在负载处连接一个调谐器。一条开槽线插入系统中以检查匹配的质量。根据连接的负载和调谐器可知,VSWR = 1.15,V_{min} 位于 253.4 mm 处。当移走调谐器和负载,用短路代替时,发现相邻的电压最小值位于 40 mm 和 330 mm 处(刻度上的低数字位于负载边)。求由"最佳匹配"引起的线路上的残余归一化导纳。

答案:$0.98-j0.14$

15.65 一条长 60m 的 50Ω 无损耗同轴电缆,相速为 2×10^8m/s,终端短路。$t=0$ 时线路被连接到内电阻为 25Ω 的 30 V 直流电源上。画出发送端电压的曲线,时间从 $t=0$ 到电压降至低于 0.1 V 时为止。

答案:见图 15-45。

15.66 一条 $\varepsilon_r=2.78$ 的 90Ω 无损耗线路在 $t=0$ 时被连接到内电阻为 120Ω 的 70 V 直流电源上。如果线路长 135 m,求终端的开路电压达稳态值 97% 时的时间。什么时候终端电压达到稳态值的 99.95%?

答案:2.25μs, 5.25μs

15.67 脉冲发生器的内电阻为 150Ω,产生 20μs 脉冲,开路峰值为 + 8 V。发生器连接到一条 50Ω 无损耗 200μs 延迟线上,其终端接 100Ω 电阻。如果脉冲周期为 4ms,画出延迟线输入端的电压波形,时间从脉冲开始时 $t=0$ 至 $t=1.4$ms 为止。

答案:见图 15-46。

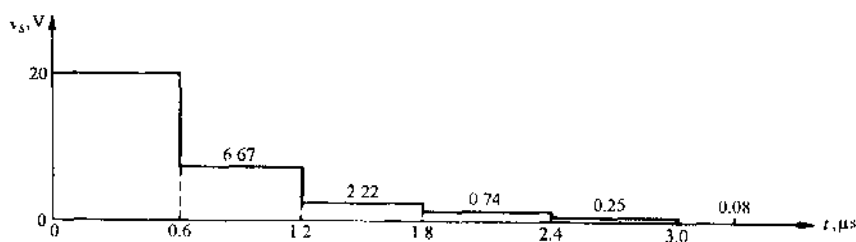


图 15-45

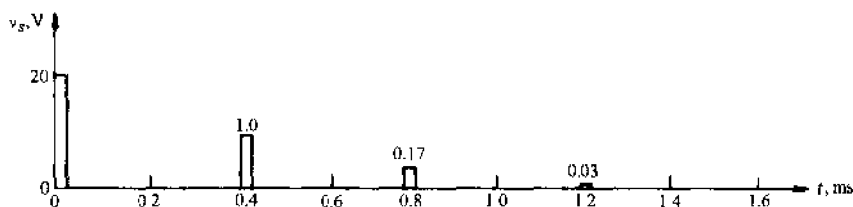


图 15-46

15.68　一条 70Ω 无损耗 50μs 的延迟线终端接 30Ω 电阻器并且被脉冲发生器激励，画出 v_S 和 v_R 关于时间的草图，时间从 $t=0^+$ 至 $t=300\mu s$。发生器内电阻为 70Ω，产生一个 2μs 脉冲，开路电压峰值为 +10 V，重复频率为 1000 脉冲/秒。

答案：见图 15-47。

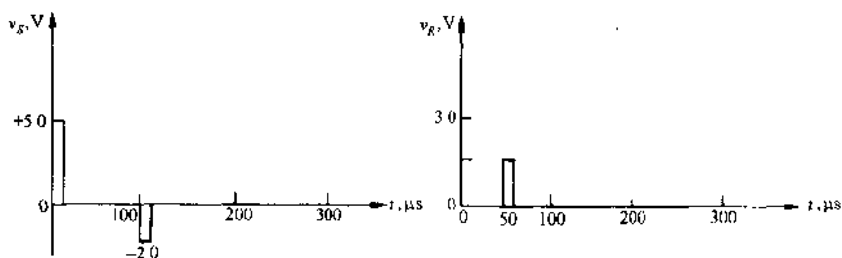


图 15-47

15.69　在图 15-48 中，利用线路产生宽度为 12 ns、峰值为 800 V 的短矩形脉冲。断开开关 S-2，闭合开关 S-1 为电路充电至 V_{dc}；充电后断开 S-1。然后 $t=0$ 时闭合开关 S-2，使线路通过 R_R 放电并且形成脉冲。求线路的长度和 V_{dc}。

答案：1.2 m，1600V

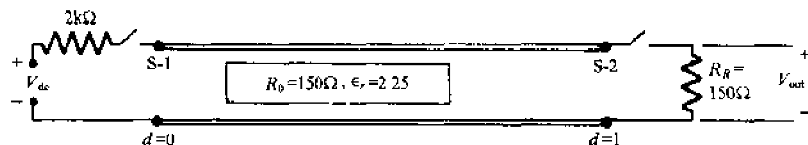


图 15-48

15.70　一条长 220m 的 90Ω 无损耗线路，$\epsilon_r=3.65$，终端接 50Ω 电阻，并且被脉冲发生器激励，画出 v_S 和 v_R 关于时间的草图，时间从 $t=0^+$ 至 $t=30\mu s$。发生器的内电阻为 90Ω，产生一个 5μs 的脉冲，开路峰值为 +140V，重复频率为 100 脉冲/秒。

答案：见图 15-49。

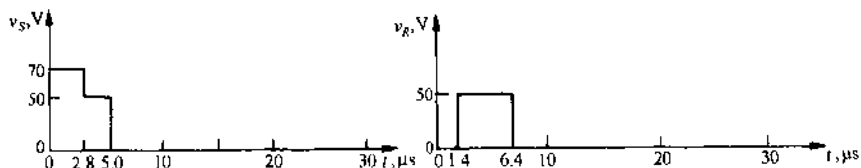


图 15-49

第16章 波 导

（作者： M. L. Kult）

16.1 引言

应用各种特定的方法可引导第14章中的电磁波作定向传播。例如，第15章所讨论的传播兆赫频率平面波的双导体传输线。本章仅研究具有矩形或圆形截面的单导体(空心导管)波导，它们工作在千兆赫(微波)频率范围内，它们也传播“平面波”——波阵面与传播方向垂直的波。

16.2 横向场和轴向场

设波导的纵向方向沿 z 轴放置，波导壁的电导率具有 $\sigma_c=\infty$(理想导体)，波导内所填充的电介质具有 $\sigma=0$(理想电介质)，$\mu=\mu_0\mu_r$ 和 $\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$；进一步假定电介质内 $\rho=0$(无自由电荷)。波导截面的尺寸是指内侧尺寸。图16-1(a)表示笛卡儿坐标系中面积为 $a\times b$ 的矩形波导，图16-1(b)表示圆柱坐标系中半径为 a 的圆形或柱形波导。

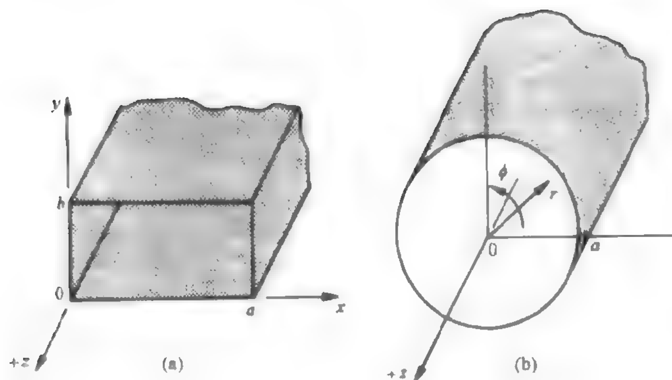


图 16-1

与第14章一样，假定电介质内电磁场对时间的依赖关系为 $e^{j\omega t}$，这一时间因子在分析过程中将省略不写(就像在相量符号中一样)。因此，假定波沿 $+z$ 方向传播，对于场矢量 $\mathbf{F}$(代表 $\mathbf{E}$ 或 $\mathbf{H}$)，我们可写出如下表达式：

直角坐标系 $\mathbf{F}=\mathbf{F}(x,y)e^{-jkz}$

其中
$$\mathbf{F}(x,y)=F_x(x,y)\mathbf{a}_x+F_y(x,y)\mathbf{a}_y+F_z(x,y)\mathbf{a}_z$$
$$\equiv\mathbf{F}_T(x,y)+F_z(x,y)\mathbf{a}_z$$

圆柱坐标系 $\mathbf{F}=\mathbf{F}(r,\varphi)e^{-jkz}$

其中
$$\mathbf{F}(r,\varphi)=F_r(r,\varphi)\mathbf{a}_r+F_\varphi(r,\varphi)\mathbf{a}_\varphi+\mathbf{F}_z(r,\varphi)\mathbf{a}_z$$
$$\equiv\mathbf{F}_T(r,\varphi)+F_z(r,\varphi)\mathbf{a}_z$$

由于电介质是无损耗的($\sigma=0$)，波在传播中没有衰减，所以**波数** $k=2\pi/\lambda$(单位符号为 rad/m)为正实数。

注：本书的其他章节中考虑无界区域中的无损耗电介质时，波数用 β 表示，它仅由频率和电介质的性质决定。然而，正如即将看到的那样，在有界区域中的电介质中，波数还取决于边界的几何形状。为了强调这一重要的差别，本章采用一个新符号 k 表示波数。

把场矢量分解成横向矢量分量 $\mathbf{F}_T$ 和轴向矢量分量 $F_z\mathbf{a}_z$ 的原因有两个。一方面，边界条

件仅适用于 $\mathbf{E}_T$ 和 $\mathbf{H}_T$(见习题 16.1 和 16.2)。另一方面,本章将证明一旦知道了笛卡儿分量 E_z 和 H_z 中的一个,波导中完整的场 **E** 和 **H** 也就知道了。

以下用轴向分量表示横向分量。

采用笛卡儿坐标系。由 14.2 节中的麦克斯韦方程(2)得到三个标量方程:

$$-j\omega\mu H_x = jkE_y + \frac{\partial E_z}{\partial y} \tag{1a}$$

$$-j\omega\mu H_y = -jkE_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} \tag{1b}$$

$$-j\omega\mu H_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \tag{1c}$$

根据 $\sigma=0$,由 14.2 节中的麦克斯韦方程(1)得到三个附加标量方程:

$$j\omega\varepsilon E_x = jkH_y + \frac{\partial H_z}{\partial y} \tag{2a}$$

$$j\omega\varepsilon E_y = -jkH_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} \tag{2b}$$

$$j\omega\varepsilon E_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \tag{2c}$$

于是,将式(1a)和(2b)中的 H_x 以及式(1b)和(2a)中的 H_y 消去,得到

$$E_y = -\frac{jk}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{j\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial x} \tag{3a}$$

$$E_x = -\frac{jk}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{j\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial y} \tag{3b}$$

其中 $k_c^2 \equiv \omega^2\mu\varepsilon - k^2$。参数 k_c(单位为 rad/m)是**临界波数**,见习题 16.3。最后,把式(3b)和(3a)代入式(2a)和(2b)中,求得

$$H_y = -\frac{jk}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x} \tag{3c}$$

$$H_x = -\frac{jk}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y} \tag{3d}$$

通过恰当地激励波导,可使 E_z 或 H_z 恒为零(但不会同时为零)。那么,不为零的轴向分量将通过方程(3)确定其他所有分量。

在圆柱坐标系中也有相似的结论,见习题 16.4 和 16.5。

16.3 TE 模和 TM 模 波阻抗

由于在波导内,$E_z\equiv0$ 或 $H_z\equiv0$,所以 16.2 节中求得的两种类型的波称为**横电**(TE)波或**横磁**(TM)波。载有这两种波的波导被称为工作在 TE 模或 TM 模。

对于任意的横向电磁波,**波阻抗**(单位:Ω)被定义为(对照第 14 章)

$$\eta \equiv \frac{|\mathbf{E}_T|}{|\mathbf{H}_T|} \tag{4}$$

对于工作于 TE 模的波导,$E_z=0$,由式(1a)和(1b),可知

$$|\mathbf{E}_T|^2 = |E_x|^2 + |E_y|^2 = \left(\frac{\omega\mu}{k_{\mathrm{TE}}}\right)^2(|H_y|^2+|H_x|^2) = \left(\frac{\omega\mu}{k_{\mathrm{TE}}}\right)^2|\mathbf{H}_T|^2$$

从而

$$\eta_{\mathrm{TE}} = \frac{\omega\mu}{k_{\mathrm{TE}}} \tag{5}$$

由于式(4)仅涉及到两维矢量的长度,所以 η 必与坐标系无关。习题 16.6 给出了圆柱坐标系中 η_{TE} 的值,习题 16.7 给出了笛卡儿坐标系中的 η_{TM}:

$$\eta_{TM} = \frac{k_{TM}}{\omega\varepsilon} \tag{6}$$

16.4　轴向场的确定

为了完整地描述TE模或TM模，接下来就需要确定各自的轴向场：对于TE，$F_z = H_z$；对于TM，$F_z = E_z$。F的笛卡儿分量$F_x e^{-jkz}$（无论在笛卡儿坐标系还是在圆柱坐标系中）必满足14.2节中得到的标量波动方程

$$\nabla^2(F_z e^{-jkz}) = -\omega^2\mu\varepsilon(F_z e^{-jkz}) \tag{7}$$

同时也满足关于分量$\mathbf{F}_T$的边界条件。（**注**：诸如$H_\varphi e^{-jkz}$的横向分量不是笛卡儿分量，不满足上述标量波动方程。）

下面导出矩形波导中TE模的显式解。

对于矩形波导，波动方程(7)变为

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + k_{cTE}^2 H_z = 0$$

其中，如前所定义，$k_{cTE}^2 = \omega^2\mu\varepsilon - k_{TE}^2$。利用分离变量法求解(见8.7节)，上式的通解为

$$H_z(x,y) = (A_x\cos k_x x + B_x\sin k_x x)(A_y\cos k_y y + B_y\sin k_y y) \tag{8}$$

其中$k_x^2 + k_y^2 = k_{cTE}^2$。分离常数$k_x$和$k_y$由边界条件确定(回顾习题8.19)。由于边界条件$E_y(0,y) = E_y(a,y) = 0$，所以根据式(3a)和$E_z \equiv 0$，这些条件变为

$$\left.\frac{\partial H_z}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial H_z}{\partial x}\right|_{x=a} = 0$$

把这些条件应用于式(8)得到待定系数$B_x = 0$和

$$\sin k_x a = 0 \quad 或 \quad k_x = \frac{m\pi}{a}(m = 0,1,2,\cdots)$$

根据对称性，y方向的边界条件使待定系数$B_y = 0$和

$$k_y = \frac{n\pi}{b}\ (n = 0,1,2,\cdots)$$

每一对除(0,0)外的非负整数(m,n)都给出了一种解——确定了一种不同的TE模，用TE_{mn}表示。这种模的轴向场为

$$H_{zmn}(x,y) = H_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} \tag{9}$$

根据上式，横向场可通过式(3)获得。TE_{mn}的临界波数为

$$k_{cTEmn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \tag{10}$$

用临界波数表示TE_{mn}的波数和波阻抗为

$$k_{TEmn} = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - k_{cTEmn}^2} \tag{11}$$

$$\eta_{TEmn} = \frac{\omega\mu}{\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - k_{cTEmn}^2}} \tag{12}$$

关于矩形波导中的TM_{mn}模可参见习题16.9，题中表明$k_{cTMmn} = k_{cTEmn}$。因此，下标TE和TM可从矩形波导的所有模参数以及波阻抗的表达式中省略。对于圆柱形波导，情况并非如此，见习题16.2。

16.5　模的截止频率

实际中我们处理的是频率，而不是波数，于是希望用**截止频率**f_c的概念代替临界波数k_c的概念。这可通过下面的定义实现(见习题16.3)：

$$f_c = \frac{u_0}{2\pi} k_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} k_c \tag{13}$$

使用截止频率 f_c 和工作频率 $f=\omega/2\pi>f_c$，式(10)、(11)和(12)变为

$$f_{cmn} = \frac{u_0}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad (矩形波导) \tag{10'}$$

$$k_{mn} = \frac{2\pi}{u_0}\sqrt{f^2-f_{cmn}^2} \quad 或 \quad \lambda_{mn} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-(f_{cmn}/f)^2}} \tag{11'}$$

$$\eta_{TEmn} = \frac{\eta_0}{\sqrt{1-(f_{cmn}/f)^2}} \tag{12'}$$

其中 $\lambda_0=u_0/f$ 是在工作频率下虚构的均匀平面波的波长，$\eta_0=\sqrt{\mu/\varepsilon}$ 是无损耗电介质的平面波的波阻抗。式(11′)的第二种形式表示**工作波长** λ_0 和实际**波导波长** λ_{mn} 之间的关系。对于 TM_{mn} 波，式(12′)被替换为(见式(6))

$$\eta_{TMmn} = \eta_0\sqrt{1-\left(\frac{f_{cmn}}{f}\right)^2} \tag{14}$$

TE_{mn} 或 TM_{mn} 波的相速为

$$u_{mn} = \lambda_{mn} f = \frac{u_0}{\sqrt{1-\left(\frac{f_{cmn}}{f}\right)^2}} \tag{15}$$

如果式(10′)用含贝塞尔函数的相似表达式代替(见习题 16.10 和 16.11)，则以上所有表达式对圆柱形波导均成立。

截止的含义在式(15)中体现得特别明显。当工作频率降至截止频率时，相速变为无穷大，这不是波的传播特性，而是扩散(具有指数规律小扰动的瞬时传播)的特性。

16.6 主模

任何波导的**主模**是指具有最低截止频率的模。对于矩形波导，可以调整坐标系使 $a\geqslant b$。对于 TE 模或 TM 模，由于(习题 16.9)

$$f_{cmn} = \frac{u_0}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

在 TM 模中，m 和 n 都不能为零，所以矩形波导的主模总是 TE_{10}，同时

$$f_{c10} = \frac{u_0}{2a}, \quad \lambda_{10} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-(\lambda_0/2a)^2}} \equiv \frac{2\pi}{k_{10}}, \quad u_{10} = \lambda_{10} f, \quad \eta_{10} = \frac{\lambda_{10}}{\lambda_0}\eta_0$$

根据式(9)、$E_{z10}\equiv 0$ 和 16.2 节中的方程，可得

$$\begin{aligned} H_{z10} &= H_{10}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right), \qquad E_{x10} = 0 \\ H_{x10} &= j\left(\frac{2a}{\lambda_{10}}\right)H_{10}\sin\frac{\pi x}{a}, \quad E_{y10} = -\eta_{10}H_{x10} = -j\eta_0\left(\frac{2a}{\lambda_0}\right)H_{10}\sin\frac{\pi x}{a} \\ H_{y10} &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

由于 H_{10} 是实数，所以三个非零场分量具有如下的时域表达式：

$$\begin{aligned} H_{z10} &= H_{10}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - k_{10}z) \\ H_{x10} &= -\left(\frac{2a}{\lambda_{10}}\right)H_{10}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t - k_{10}z) \\ E_{y10} &= \eta_0\left(\frac{2a}{\lambda_{10}}\right)H_{10}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t - k_{10}z) \end{aligned} \tag{17}$$

$t=0$ 时主模场(17)的曲线见图 16-2 和图 16-3。$|E_y|$ 和 $|H_x|$ 均按照 $\sin(\pi x/a)$ 变化。图 16-2

说明，E 线在 $x=a/2$ 附近密集，在 $x=0$ 和 $x=a$ 附近分散。由于 H 不随 y 变化，所以 H 线等间距分布。在图 16-3(a)中用相同的线密度画出了 $|\mathbf{E}|=|E_y|$ 的局部值，图 16-3(b)中用相同的线密度画出了 $|\mathbf{H}|=\sqrt{H_x^2+H_z^2}$ 的局部值。观察到 H 线是闭合曲线($\mathrm{div}\mathbf{H}=0$)，场 H 可认为是与位移电流密度 $\mathbf{J}_D$(12.1 节)垂直的环线。

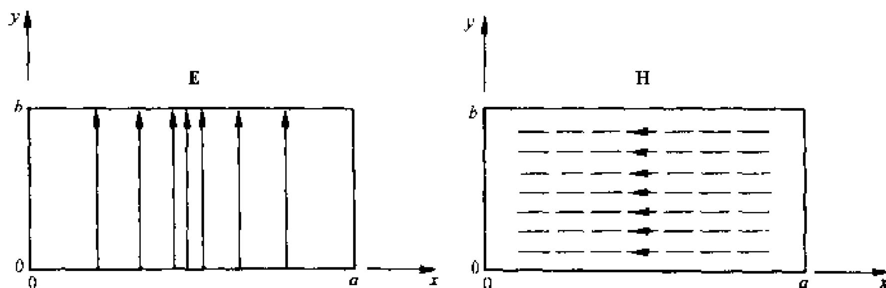


图 16-2 横截面 $z=\lambda_{10}/4(-k_{10}z=\pi/2)$

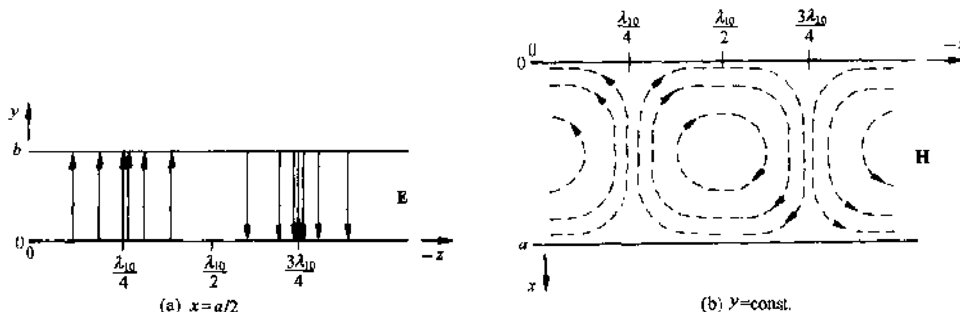


图 16-3 纵截面

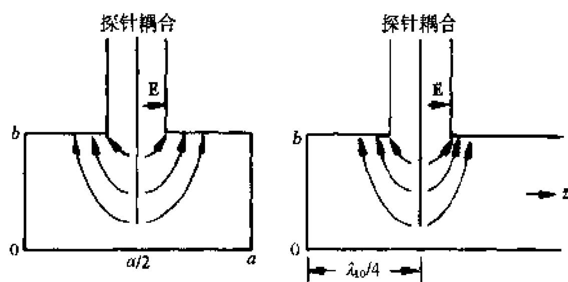


图 16-4

图 16-4 表明用探针部分地插入波导上管壁($y=b$, $x=a/2$)距波导端部 $z=\lambda_{10}/4$ 处，可产生 TE_{10} 模。在探针的附近也存在高阶模，但只要恰当地选取频率和尺寸，它们就不会传播。

关于圆柱形波导的主模，见习题 16.13。

16.7 无损耗波导中的传输功率

沿 $+z$ 方向的平均传输功率可通过复坡印廷矢量的 z 分量沿波导的横截面积分来计算(参见 14.12 节)：

$$\bar{P}_z=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\iint_{\text{截面}}\mathbf{E}_T\times\mathbf{H}_T^*\cdot\mathbf{a}_z dS \tag{18}$$

由式(16)，并记 $A_g=ab$，对于无损耗矩形波导的主模，我们得到

$$\bar{P}_{z10}=\frac{\eta_0}{4}|H_{10}|^2\left(\frac{2a}{\lambda_0}\right)\left(\frac{2a}{\lambda_{10}}\right)A_g=\frac{\eta_0}{4}|H_{10}|^2A_g\left(\frac{f}{f_{c10}}\right)^2\sqrt{1-\left(\frac{f_{c10}}{f}\right)^2} \tag{19}$$

同所预料的一样,无损耗系统中 P_{z10} 与 z 无关,而且功率与场的振幅的平方以及波导的截面积成正比。由于波导的激励一般用电场的振幅表示:

$$|E_{10}| = \eta_0\left(\frac{2a}{\lambda_0}\right)|H_{10}|$$

所以式(19)又可写为

$$\bar{P}_{z10} = \frac{|E_{10}|^2 A_g}{4\eta_0}\sqrt{1-\left(\frac{f_{c10}}{f}\right)^2} = \frac{|E_{10}|^2 A_g}{4\eta_{TE10}}\ (\mathrm{W}) \tag{19'}$$

对于高阶模也存在类似于式(19)和(19′)的关系式。

关于无损耗圆柱形波导的传输功率,见习题16.15。

16.8 有损耗波导中的功率损耗

当波导电介质具有不为零的小电导率和/或波导壁的电导率不为无穷大时,任何传播模式的波都将衰减,传输功率也将按 z 的指数规律衰减。对这种**电介质损耗**和**管壁损耗**可作近似处理:假定这两种类型的损耗可单独分析,并且与管壁相互作用的场是当电介质没有损耗时存在的场。为了使数学分析尽可能简化,我们仅讨论矩形波导的 TE_{10} 模。

(1) 电介质损耗

如果电介质的电导率 $\sigma = \sigma_d$ 用0代替,电介质的介电常量 ε_d 用复介电常量

$$\hat{\varepsilon} \equiv \varepsilon_d - \frac{j\sigma_d}{\omega}$$

代替,14.2节中的麦克斯韦方程(1)~(4)不变。因此,在形式上用 $\hat{\varepsilon}$ 代替 ε_d,有损耗电介质的场方程就可从无损耗电介质的场方程获得。特别地,有损耗 TE_{10} 模中场矢量的 z 因子是 $\exp(\gamma_{10}z)$,这里根据式(11),可得

$$\gamma_{10} = jk_{10}(\hat{\varepsilon}) = j\sqrt{\omega^2\mu_d\hat{\varepsilon} - k_{c10}^2} = j\sqrt{(\omega^2\mu_d\varepsilon_d - k_{c10}^2) - j\omega\mu_d\sigma_d}$$

$$\equiv j\beta_{10}\left(1 - \frac{j\omega\mu_d\sigma_d}{\beta_{10}^2}\right)^{1/2} \approx \frac{\omega\mu_d\sigma_d}{2\beta_{10}} + j\beta_{110} \tag{20}$$

式中

$$\beta_{10} = \sqrt{\omega^2\mu_d\varepsilon_d - k_{c10}^2} = k_{10}(\varepsilon_d) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{1-(f_{c10}/f)^2} \tag{21}$$

二项式近似假定 σ_d 和 ω 很小使得 $\omega\mu_d\sigma_d \ll \beta_{10}^2$。于是,对于这样的一次近似式,有损耗电介质中的波数 γ_{10} 的虚部等于理想电介质中的波数,而决定电介质功率损耗的**衰减系数** $\alpha_d = \mathrm{Re}\gamma_{10}$ 为

$$\alpha_d = \frac{\omega\mu_d\sigma_d}{2\beta_{10}} = \frac{(\sqrt{\mu_d/\varepsilon_d})\sigma_d}{2\sqrt{1-(f_{c10}/f)^2}} = \frac{1}{2}\eta_{TE10}\sigma_d\ (\mathrm{Np/m}) \tag{22}$$

(2) 管壁损耗

决定管壁损耗的衰减系数 α_w 可用如下方法间接确定。由于功率随场强的平方变化,所以 TE_{10} 模中平均传输功率必然满足

$$P_{av}(z) = \bar{P}_{z10}e^{-2\alpha_w z}$$

其中,起始功率 $\bar{P}_{z10}$ 由式(19)给出。因此,每单位 z 长管壁内的功率损耗为

$$P_{loss}(z) = -P'_{av}(z) = 2\alpha_w P_{av}(z)$$

据此

$$\alpha_w = \frac{P_{loss}(z)}{2P_{av}(z)} = \frac{P_{loss}(0)}{2\bar{P}_{z10}} \tag{23}$$

接下来要计算 $P_{loss}(0)$,即流入管壁内表面起始1m的功率。不难证明,管壁表面的切向 **H**(假定可根据式(16)求出)构成了坡印廷矢量,其平均值为

$$\bar{S}_{loss} = \frac{1}{2}R_s \mid \mathbf{H}_{tang} \mid^2 \tag{24}$$

方向指向管壁。这里，$R_s = \mathrm{Re}\,\eta_w = \sqrt{\pi f \mu_w / \sigma_w}$(14.6节)是给定频率 f 下管壁材料的**表面电阻**(Ω)。沿每个管壁起始1m对式(24)的表达式积分，再加上其他结果可求得

$$P_{loss}(0) = R_s \mid H_{10} \mid^2 \left[b + \frac{a}{2}(f/f_{c10})^2 \right] \quad (\mathrm{W/m}) \tag{25}$$

根据式(23)、(19)和(25)，得

$$\alpha_w = \frac{R_{sc10}}{\eta_0}\left(\sqrt{\frac{f}{f_{c10}}}\right)\frac{a + 2b(f_{c10}/f)^2}{ab\sqrt{1-(f_{c10}/f)^2}} \quad (\mathrm{Np/m}) \tag{26}$$

其中，R_{sc10} 是在 TE_{10} 的截止频率下的表面电阻，$\eta_0 = \sqrt{\mu_d/\varepsilon_d}$ 是(无损耗)电介质的平面波阻抗。

(3)合成损耗

总衰减系数为 $\alpha_{tot} = \alpha_w + \alpha_d$。把Np/m变换成更一般的dB/m，可见习题14.7。

习 题 求 解

16.1 给出图16-1(a)中的波导各理想导体壁上 **E** 和 **H** 的边界条件。

解 在理想导体处，切向 **E** 和法向 **H** 为零。因此：

上管壁 $E_z(x,b) = E_x(x,b) = 0$ 且 $H_y(x,b) = 0$

左管壁 $E_z(0,y) = E_y(0,y) = 0$ 且 $H_x(0,y) = 0$

右管壁 $E_z(a,y) = E_y(a,y) = 0$ 且 $H_x(a,y) = 0$

下管壁 $E_x(x,0) = E_z(x,0) = 0$ 且 $H_y(x,0) = 0$

16.2 对于图16-1(b)中的波导，重做习题16.1。

解 在单个圆柱壁上，有

$$E_z(a,\varphi) = E_\varphi(a,\varphi) = 0 \quad 且 \quad H_r(a,\varphi) = 0$$

16.3 关于波数 k_c 的"临界"是指什么？

解 波在无损耗电介质中传播时，波数 k 必为实数。而

$$k = \sqrt{\omega^2 \mu\varepsilon - k_c^2} = \sqrt{k_0^2 - k_c^2}$$

式中 k_0 是无界区域电介质中给定频率 ω 的均匀平面波的波数。因此，k_c^2 不能大于 k_0^2，k_c 是临界波数，在某种意义上是指对应导波同一频率的导波的波数应大于 k_c。另一种说法是，导波的频率 f 应大于 $(u_0/2\pi)k_c$，其中 $u_0 = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ 是无界区域电介质中的波速。

16.4 在圆柱坐标系中，用标量形式表达14.2节中的麦克斯韦方程(1)和(2)。

解 关于圆柱坐标系中的旋度表达式，见附录。由方程(1)可得($\sigma = 0$)

$$j\omega\varepsilon E_r = \frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} + jkH_\varphi \tag{i}$$

$$j\omega\varepsilon E_\varphi = -jkH_r - \frac{\partial H_z}{\partial r} \tag{ii}$$

$$j\omega\varepsilon E_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \tag{iii}$$

由方程(2)得

$$-j\omega\mu H_r = \frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \varphi} + jkE_\varphi \tag{iv}$$

$$-j\omega\mu H_\varphi = -jkE_r - \frac{\partial H_z}{\partial r} \tag{v}$$

$$-j\omega\mu H_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \tag{vi}$$

16.5 利用习题16.4中的方程，求所有的场分量，用 E_z 和 H_z 表示。

根据式(i)、(v)以及前面定义的 k_c，有

$$E_r = -\frac{j\omega\mu}{k_c^2}\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\varphi} - \frac{jk}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial r} \tag{1}$$

根据式(ii)和(iv)，有

$$H_r = \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2}\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial\varphi} - \frac{jk}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial r} \tag{2}$$

根据式(1)和(i)，得

$$H_\varphi = -\frac{j\omega\epsilon}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{jk}{k_c^2}\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\varphi} \tag{3}$$

根据式(2)和(ii)，得

$$E_\varphi = -\frac{jk}{k_c^2}\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial\varphi} + \frac{j\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial r} \tag{4}$$

16.6 在圆柱坐标系中，利用场分量计算 η_{TM}。

根据 $E_z\equiv0$，由习题 16.4 中的式(iv)和(v)，可得

$$|\mathbf{H}_T| = \sqrt{|H_r|^2+|H_\varphi|^2} = \sqrt{\left(\frac{k_{TE}}{\omega\mu}\right)^2|E_\varphi|^2 + \left(\frac{k_{TE}}{\omega\mu}\right)^2|E_r|^2} = \frac{k_{TE}}{\omega\mu}|\mathbf{H}_T|$$

所以
$$\eta_{TE} = \frac{|\mathbf{E}_T|}{|\mathbf{H}_T|} = \frac{\omega\mu}{k_{TE}}$$

16.7 在笛卡儿坐标系中，利用场分量计算 η_{TM}。

根据 $H_z\equiv0$，由式(2a)和(2b)，可得

$$|E_x|^2+|E_y|^2 = \left(\frac{k_{TM}}{\omega\epsilon}\right)(|H_x|^2+|H_y|^2) \quad 或\ |\mathbf{E}_T| = \frac{k_{TM}}{\omega\epsilon}|\mathbf{H}_T|$$

所以
$$\eta_{TM} \equiv \frac{|\mathbf{E}_T|}{|\mathbf{H}_T|} = \frac{k_{TM}}{\omega\epsilon}$$

16.8 说明在任何 TE 模或 TM 模(普通平面波)中，**E** 和 **H** 相互垂直。

对于任意一种波，$E_x=\eta H_y$ 和 $E_y=-\eta H_x$，因此，利用 η 是实数，可得

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_T\cdot\mathbf{H}_T &= \mathrm{Re}(E_xH_x^*+E_yH_y^*) = \mathrm{Re}(\eta H_yH_x^* - \eta H_xH_y^*)\\ &= \eta\mathrm{Re}(H_yH_x^* - H_xH_y^*) = 0\end{aligned}$$

又由于 $E_zH_z^*$ 为零，所以 $\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}=0$。

16.9 对于 TM_{mn}，求类似于式(9)～(12)的公式。

类似于式(8)，此时有

$$E_z(x,y) = (C_x\cos k_xx + D_x\sin k_xx)(C_y\cos k_yy + D_y\sin k_yy)$$

其中 $k_x^2+k_y^2=k_{cTM}^2\equiv\omega^2\mu\epsilon-k_{TM}^2$。边界条件

$$E_z(0,y) = E_z(a,y) = 0 \text{ 和 } E_z(x,0) = E_z(x,b) = 0$$

要求

$$C_x = 0,\quad k_x = \frac{m\pi}{a},\quad C_y = 0,\quad k_y = \frac{n\pi}{b}$$

其中 $m,\ n = 1,2,3,\cdots$。注意在 TM 模中 m 和 n 均不为零。

所要求的公式为

$$E_{zmn}(x,y) = E_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{1}$$

$$k_{cTMmn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = k_{cTEmn} \tag{2}$$

$$k_{TMmn} = k_{TEmn} \tag{3}$$

$$\eta_{TMmn} = \frac{k_{TM}}{\omega\epsilon} \tag{4}$$

16.10 确定无损耗圆柱形波导的 TM 模。

圆柱坐标系中的拉普拉斯方程见附录。关于 $E_z(r,\varphi)$的波动方程(7)成为

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2}+k_{cTM}^2 E_z=0 \quad (k_{cTM}^2=\omega^2\mu\epsilon-k_{TM}^2)$$

由边界条件：(i) $E_z(r,\varphi+2\pi)=E_z(r,\varphi)$；(ii) $E_z(0,\varphi)$有界；(iii) $E_z(a,\varphi)=0$，并仿效8.8节，我们利用分离变量法，求得

$$E_{np}(r,\varphi)=E_{np}J_n(k_{cTMnp}r)\cos n\varphi \tag{1}$$

其中 $n=0,1,2,\cdots$，$x_{np}\equiv k_{cTMnp}a$ 是 $J_n(x)=0$ 的第 p 个正根($p=1,2,\cdots$)，前几个根列于表16-1中。

表16-1 $J_n(x)=0$ 的根 x_{np}

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$p=1$	2.405	3.832	5.136	6.380
$p=2$	5.520	7.016	8.417	9.761
$p=3$	8.645	10.173	11.620	12.015

借助于习题16.5，由表达式(1)和 $H_z\equiv0$ 可确定TM中所有的横向场分量。TM_{np}的截止频率为

$$f_{cTMnp}=\frac{u_0}{2\pi a}x_{np} \tag{2}$$

当使用式(2)时，矩形波导的所有公式也适用于圆柱形波导，例如

$$\eta_{TMnp}=\eta_0\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0 x_{np}}{2\pi a}\right)^2} \tag{3}$$

16.11 确定无损耗圆柱形波导的TE模。

解 在TE模中，轴向场 $H_z(r,\varphi)$满足波动方程以及习题16.10中的条件(i)和(ii)。作为习题16.5中式(2)的结论，条件(iii)用下式代替：

$$\left.\frac{\partial H_z}{\partial r}\right|_{r=a}=0$$

因此，利用分离变量法，求得

$$H_{np}(r,\varphi)=H_{np}J_n(k_{cTEnp}r)\cos n\varphi \tag{1}$$

其中 $n=0,1,2,\cdots$，$x'_{np}\equiv k_{cTEnp}a$ 是 $J'_n(x)=0$ 的第 p 个正根($p=1,2,\cdots$)，见表16-2。

表16-2 $J'_n(x)=0$ 的根 x'_{np}

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$p=1$	3.832	1.841	3.054	4.201
$p=2$	7.016	5.331	6.706	8.015
$p=3$	10.173	8.536	9.969	11.346

与习题16.10中的式(2)和(3)相似的结论是：

$$f_{cTEnp}=\frac{u_0}{2\pi a}x'_{np} \tag{2}$$

$$\eta_{TEnp}=\frac{\eta_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0 x'_{np}}{2\pi a}\right)^2}} \tag{3}$$

16.12 比较f_{cTEnp}和f_{cTMnp}的大小。

解 对于每一个固定的 n，$J_n(x)$的零点 x_{np}和驻点x'_{np}——$J_n(x)$达最大值或最小值的点——沿 x 轴交替分布；这种类似于正弦波的性质体现在图8-3(a)中。对于 $n>0$，函数起始于0，第一个驻点在第一个正零点之前，因而，$x'_{np}<x_{np}$，所以

$$k_{cTEnp}<k_{cTMnp} \quad 且 \quad f_{cTEnp}<f_{cTMnp}$$

对于 $n=0$，函数起始于最大值，第一个零点和驻点的顺序相反，从而有

$$k_{cTE0p}>k_{cTM0p} \quad 且 \quad f_{cTE0p}>f_{cTM0p}$$

16.13 (a)什么是无损耗圆柱形波导的主模？(b)按截止频率增大的顺序列出前五种模。

解 (a)根据习题16.12，主模要么是TM_{01}，要么是TE_{n1}，与最小截止频率有关。表16-1和16-2

表明(并且分析也证实了)主模是 TE_{11}。

(b) $TE_{11}, TM_{01}, TE_{21}, TE_{01}, TM_{11}$(一族)。(表 16-2 中的第一列与表 16-1 中的第二列相等,因为 $J_0'(x) = -J_1(x)$。)

16.14 求圆柱形波导中 TE_{11} 模(主模)的横向场。

解 对于 $m = p = 1$,由习题 16.11 中的方程(1)、$E_z \equiv 0$ 和习题 16.5 中的(1)~(4)可得

$$E_{r11} = \frac{j\omega\mu H_{11}}{k_{cTE11}^2 r} J_1(k_{cTE11} r)\sin\varphi \tag{1}$$

$$H_{r11} = -\frac{jk_{TE11} H_{11}}{k_{cTE11}} J_1'(k_{cTE11} r)\cos\varphi \tag{2}$$

$$H_{\varphi 11} = \frac{jk_{TE11} H_{11}}{k_{cTE11}^2 r} J(k_{cTE11} r)\sin\varphi \tag{3}$$

$$E_{\varphi 11} = \frac{j\omega\mu H_{11}}{k_{cTE11}} J_1'(k_{cTE11} r)\cos\varphi \tag{4}$$

式中 $k_{cTE11} = x_{11}'/a$, $k_{TE11} = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - (x_{11}'/a)^2}$

16.15 计算无损耗圆柱形波导的 TE_{11} 模中的平均传输功率。

解 利用习题 16.14 给出的横向场,仿效 16.7 节,可得

$$\frac{1}{2}\mathbf{E}_T \times \mathbf{H}_T^* \cdot \mathbf{a}_z = \frac{1}{2}(E_{r11}H_{\varphi 11}^* - E_{\varphi 11}H_{r11}^*)$$

$$= \frac{\omega\mu k_{TE11} |H_{11}|^2}{2k_{cTE11}^2}\left\{\left[\frac{J_1(v)}{v}\right]^2\sin^2\varphi + [J_1'(v)]^2\cos^2\varphi\right\} \tag{1}$$

这里引入了积分变量 $v = k_{cTE11} r$。式(1)沿截面 $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ 和 $0 \leqslant v \leqslant x_{11}'$ 积分,$\sin^2$ 和 $\cos^2$ 被积成 π;因此

$$\bar{P}_{z11} = \frac{\pi\omega\mu k_{TE11} |H_{11}|^2}{2k_{cTE11}^4}\int_0^{x_{11}'}\left\{[J_1'(v)]^2 + \left[\frac{J_1(v)}{v}\right]^2\right\} v\,dv \tag{2}$$

计算形如式(2)的积分有一个一般的规则:返回到由分离变量法得到的常微分方程。在本题中,常微分方程是(见 8.8 节)

$$J_1'' + \frac{1}{v}J_1' + \left(1 - \frac{1}{v^2}\right)J_1 = 0 \tag{3}$$

因而,利用分部积分,由式(3)和端点条件 $J_1(0) = J_1'(x_{11}') = 0$,我们得到

$$\int_0^{x_{11}'}[(J_1')^2 + (J_1/v)^2]v\,dv = \int_0^{x_{11}'}\left[J_1' + \left(\frac{J_1}{v}\right)\right]^2 v\,dv - \int_0^{x_{11}'} d(J_1^2)$$

$$= \int_0^{x_{11}'}\left[J_1' + \left(\frac{J_1}{v}\right)\right]^2 d\left(\frac{v^2}{2}\right) - J_1^2(x_{11}')$$

$$= \frac{1}{2}(vJ_1' + J_1)^2\Big|_0^{x_{11}'} - \int_0^{x_{11}'} v^2\left[J_1' + \frac{J_1}{v}\right]$$

$$\times\left(J_1'' + \frac{1}{v}J_1' - \frac{1}{v^2}J_1\right)dv - J_1^2(x_{11}')$$

$$= -\frac{1}{2}J_1^2(x_{11}') - \int_0^{x_{11}'} v^2\left(J_1' + \frac{J_1}{v}\right)(-J_1)dv$$

$$= -\frac{1}{2}J_1^2(x_{11}') + \int_0^{x_{11}'} v^2 d\left(\frac{J_1^2}{2}\right) + \int_0^{x_{11}'} vJ_1^2 dv$$

$$= -\frac{1}{2}J_1^2(x_{11}') + \frac{1}{2}v^2J_1^2\Big|_0^{x_{11}'} = \frac{(x_{11}')^2 - 1}{2}J_1^2(x_{11}')$$

把这个结果代入式(2),并且 k_{TE11} 和 k_{cTE11} 用各自的表达式代入 $x_{11}' = (2\pi a/u_0)f_{cTE11}$ 中,通过一些代数运算,我们求得

$$\bar{P}_{z11} = \frac{\eta_0}{4}|H_{11}|^2 A_g\left(\frac{f}{f_{cTE11}}\right)^2\sqrt{1 - \left(\frac{f_{cTE11}}{f}\right)^2}\left[\frac{(x_{11}')^2 - 1}{(x_{11}')^2}J_1^2(x_{11}')\right] \tag{4}$$

其中 $A_g = \pi a^2$ 是横截面的面积。

16.16 作为功率传输器,比较工作于主模的矩形波导和圆柱形波导。

两种波导的功率公式可见16.7节中的式(19)和习题16.15中的式(4),它们表明传输功率对H的振幅、截面积和归一化频率的依赖关系相同。惟一不同的是几何系数,矩形波导的值为1.0,圆柱形波导的值为

$$\frac{(1.841)^2-1}{1.841^2}(0.5814)^2 = 0.239$$

16.17 (a)定义**截止波长**的概念。(b)截止波长是不是波导波长的上限,就像截止频率是波导频率的下限那样?

(a)截止波长λ_c是指不能被引导的平面波的波长,它的频率为截止频率,即$\lambda_c f_c = u_0$。

(b)不是。事实上,公式

$$\lambda_{mn} = \frac{u_0}{\sqrt{f^2 - f_{cmn}^2}}$$

表明任何波导波长大于λ的$(m,\ n)$模都能传播。

16.18 用于S波段雷达的无损耗空气电介质矩形波导的内尺寸为$a = 7.214\text{cm}$和$b = 3.404\text{cm}$。传播TM_{11}模的工作频率是截止频率的1.1倍。计算(a)临界波数,(b)截止频率,(c)工作频率,(d)传播常量,(e)截止波长,(f)工作波长,(g)波导波长,(h)相速,(i)波阻抗。

(a) 根据式(10),$k_{c11} = \sqrt{(\pi/0.07214)^2 + (\pi/0.03404)^2} = 102.05\ \text{rad/m}$

(b) 根据式(13),$f_{c11} = [(3\times10^8)/2\pi](102.05) = 4.87\ \text{GHz}$

(c) $f = 1.1 f_{c11} = 5.36\ \text{GHz}$

(d) 根据式(11′),有

$$\gamma_{11} = jk_{11} = j\frac{2\pi}{3\times10^8}\sqrt{(5.36)^2-(4.87)^2}(10^9) = j46.8\ \text{m}^{-1}$$

(e) $\lambda_{c11} = u_0/f_{c11} = (3\times10^8)/(4.87\times10^9) = 6.16\ \text{cm}$

(f) $\lambda_0 = u_0/f = (3\times10^8)/(5.36\times10^9) = 5.60\ \text{cm}$

(g) $\lambda_{11} = 2\pi/k_{11} = 2\pi/46.8 = 13.4\ \text{cm}$

(h) 根据式(15),$u_{11} = (0.134)(5.36\times10^9) = 7.18\times10^8\ \text{m/s}$

(i) 对于空气,由$\eta_0 = 120\pi\ \Omega$和式(14),得

$$\eta_{TM11} = 120\pi\sqrt{1-\left(\frac{1}{1.1}\right)^2} = 157.5\Omega$$

16.19 无损耗空气电介质圆柱形波导的内直径为3 cm,工作于14 GHz。求沿$+z$方向传播的TM_{11}模的截止频率、波导波长和波阻抗。

根据习题16.10中的式(2)和表16-1,得

$$f_{cTM11} = \frac{u_0}{2\pi a}x_{11} = \frac{3\times10^8}{\pi(3\times10^{-2})}(3.832) = 12.2\ \text{GHz}$$

又根据式(11′)和式(14),得

$$\lambda_{11} = \frac{u_0}{\sqrt{f^2 - f_{cTM11}^2}} = \frac{3\times10^8}{\sqrt{(14)^2-(12.2)^2}(10^9)} = 4.36\ \text{cm}$$

$$\eta_{cTM11} = \eta_0\sqrt{1-\left(\frac{f_{cTM11}}{f}\right)^2} = 120\pi\sqrt{1-\left(\frac{12.2}{14}\right)^2} = 185\ \Omega$$

16.20 求无损耗空气电介质圆柱形波导的内直径使TE_{11}模的传播频率为10GHz,截止波长是工作波长的1.3倍。

已知$\lambda_{c11} = 1.3\lambda_0$,或

$$\frac{u_0}{f_{cTE11}} = 1.3\frac{u_0}{f} \quad 或 \quad f_{cTE11} = \frac{f}{1.3} = 7.692\ \text{GHz}$$

又根据习题16.11,可知

$$f_{cTE11} = \frac{u_0}{2\pi a}x'_{11} = \frac{0.3}{\pi d}(1.841)\ (\text{GHz})$$

令两个表达式相等，得 $d = 2.28$ cm。

16.21 在时域中，用空间变量 $\rho \equiv r/a$、φ 和 $\zeta \equiv k_{\mathrm{TE11}} z$ 描述习题 16.14 中的场 **E**。

解 用集总常数表示，有

$$K_\rho = \frac{\omega\mu H_{11}}{k_{c\mathrm{TE11}}^2 a}, \qquad K_\varphi = \frac{\omega\mu H_{11}}{k_{c\mathrm{TE11}}}$$

假定它们是实数，可得到($x'_{11} = 1.841$)

$$E_\rho(\rho,\varphi,\zeta,t) = \mathrm{Re}[E_{\rho 11} e^{j(\omega t-\zeta)}] = -\frac{K_\rho}{\rho} J_1(1.841\rho)\sin\varphi\sin(\omega t-\zeta)$$

$$E_\varphi(\rho,\varphi,\zeta,t) = \mathrm{Re}[E_{\varphi 11} e^{j(\omega t-\zeta)}] = -K_\varphi J'_1(1.841\rho)\cos\varphi\sin(\omega t-\zeta)$$

16.22 对于习题 16.21 所求得的场 **E**，计算并画出场线。另外，画出(不用计算)横向场 **H** 的场线。

解 任何矢量场的场线都是一族空间曲线，空间每一点处的矢量与过该点的曲线相切。因此，在笛卡尔坐标(x, y)中，横截面上 **E** 线的微分方程是 $dy/dx = E_y/E_x$，或者在极坐标(ρ,φ)中，**E** 线的微分方程是

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{E_\rho}{E_\varphi} \tag{1}$$

把习题 16.21 中 **E** 的分量代入式(1)，得到

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = K_1 \frac{J_1(1.841\rho)}{J'_1(1.841\rho)}\tan\varphi \tag{2}$$

可见，圆柱形波导中 TE_{11} 模具有特殊的性质：场的图形不随时间和沿波导的长度 ζ 变化。

通常情况下，场线通过微分方程的数值积分求得，但在本题中很容易得到解析解：

$$\ln\frac{J_1(1.841\rho)}{J_1(1.841\rho_0)} = K_2 \ln|\sec\varphi| \quad (K_2 > 0) \tag{3}$$

这是一个含有参数的曲线族，参数 ρ_0 是曲线与横轴 $\varphi = 0$[①] 相交处的半径。注意用 $-\varphi$ 或 $\varphi+\pi$ 代替 φ 时，式(3)的右边不变，所以场图关于横轴和纵轴都对称，只需考虑 $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$ 象限。当我们沿场线增大正 φ 值时，式(3)右边的正值增大(见图 8-3(a))，因此，ρ/ρ_0 的值也增大且大于 1；再利用场线与边界 $\rho = 1$ 正交的条件，可知场线必然背离原点弯曲，如图 16-5 所示。$\rho_0 = 1$ 的场线转化成一个点。

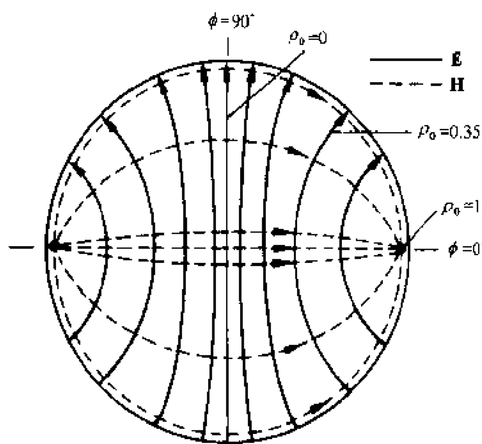


图 16-5

H 线是与 **E** 线正交的曲线，正交的理由见习题 16.8。根据习题 16.14，在点 $\rho = 1$，$\varphi = 0$、π 处，H_ρ 和 H_φ 为零，因此在那里 **H** 的方向不确定。

16.23 用于 S 波段雷达系统的无损耗空气电介质矩形波导的尺寸为 $a = 7.214$cm 和 $b = 3.404$cm。主模沿 $+z$ 方向传播，频率为 3GHz。如果场 **E** 的激励电平为 10kV/m，求传输的平均功率。

解 TE_{10} 的截止频率为

$$f_{c10} = \frac{u_0}{2a} = \frac{3\times 10^8}{2(0.07214)} = 2.08\ \mathrm{GHz}$$

又由式(19′)，得

$$\bar{P}_{z10} = \frac{(10^4)^2(7.214)(3.404)10^{-4}}{4(377)}\sqrt{1-\left(\frac{2.08}{3}\right)^2} = 117.4\ \mathrm{W}$$

①原书误印为 $\sin\varphi = 0$。——译者注

16.24 在半径为 1 cm 的无损耗空气电介质圆柱形波导中，15 GHz 时主模的传输功率为 2 W。求磁场的激励电平。

TE_{11} 的截止频率为(见表 16-2)

$$f_{cTE11} = \frac{u_0}{2\pi a}x_{11} = \frac{3\times10^8}{2\pi(1\times10^{-2})}(1.841) = 8.79\ \text{GHz}$$

所以习题 16.15 中的式(4)变为(又见习题 16.16)：

$$2 = \frac{377}{4}|H_{11}|^2(\pi 10^{-4})(15/8.79)^2\sqrt{1-(8.79/15)^2}(0.239)$$

解得，$|H_{11}| = 0.11$ A/cm。

16.25 X 波段矩形波导的截面尺寸为 $a = 2.286$ cm 和 $b = 1.016$ cm，具有理想导电管壁，且用有损耗电介质($\sigma_d = 367.5\mu$S/m, $\epsilon_r = 2.1$, $\mu_r = 1$)填充，求衰减系数(单位：dB/m)。主模的传播频率为 9 GHz。

TE_{10} 的截止频率为

$$f_{c10} = \frac{u_0}{2a} = \frac{(3\times10^8)/\sqrt{2.1}}{2(0.02286)} = 4.53\ \text{GHz}$$

又由式(22)得到(第二种形式)

$$\alpha_d \approx \frac{(377/\sqrt{2.1})(367.5\times10^{-6})}{2\sqrt{1-(4.53/9)^2}}\times 8.69 = 0.48\ (\text{dB/m})$$

读者可证明基本近似 $\omega\mu_d\sigma_d \ll \beta_{10}^2$ 适用于这些数据。

16.26 $a = 2.286$ cm 和 $b = 1.016$ cm 的 X 波段空气电介质矩形波导具有黄铜管壁($\mu_w = \mu_0$, $\sigma_w = 16$ MS/m)。当主模以 9.6 GHz 传播时，求由管壁损耗引起的衰减(单位：dB/m)。

在主模的截止频率处，有

$$f_{c10} = \frac{u_0}{2a} = \frac{3\times10^8}{4.572\times10^{-2}} = 6.56\ \text{GHz}$$

黄铜管壁的表面电阻为

$$R_{sc10} = \sqrt{\frac{\pi(6.56\times10^9)(4\pi\times10^{-7})}{16\times10^6}} = 40.24\ \text{m}\Omega$$

又根据式(26)，可得

$$\alpha_w = \frac{0.04024}{377}\left(\sqrt{\frac{9.6}{6.56}}\right)\frac{0.02286+2(0.01016)(6.56/9.6)^2}{(0.02286)(0.01016)\sqrt{1-(6.56/9.6)^2}}\times 8.69$$
$$= 0.214(\text{dB/m})$$

16.27 空气电介质圆柱形波导($a = 5$ mm)工作于 TM_{01} 模，频率为 $f = 1.3f_{cTM01}$。求一段铜波导($\sigma_w = 58$MS/m)的管壁损耗引起的衰减(单位符号为 dB/m)。

仿效 16.8 节，首先求出 $P_{loss}(0)$ 的表达式。根据习题 16.10 中的式(1)，可知 $E_{z01}(r,\varphi) = E_{01}J_0(x_{01}r/a)$；再由习题 16.5 中的式(3)可得到管壁处的切向磁场为($J_0'(v) = -J_1(v)$)

$$H_{\varphi01}(a,\varphi) = \frac{j\omega\epsilon_0 x_{01}E_{01}J_1(x_{01})}{k_{cTM01}^2 a} = \frac{jE_{01}J_1(x_{01})}{\eta_0}\left(\frac{f}{f_{cTM01}}\right)$$

又由于 $H_{\varphi01}$ 是常数，所以由式(24)得到

$$P_{loss}(0) = \frac{1}{2}R_s\left[\frac{|E_{01}|^2J_1^2(x_{01})}{\eta_0^2}\left(\frac{f}{f_{cTM01}}\right)^2\right](2\pi a) \tag{1}$$

接下来用习题 16.15 中的方法求 P_{zTM01}。根据习题 16.15，有

$$E_{r01} = \frac{jk_{TM01}E_{01}}{k_{cTM01}}J_1\left(\frac{x_{01}r}{a}\right) = jE_{01}\left(\frac{f}{f_{cTM01}}\right)\sqrt{1-\left(\frac{f_{cTM01}}{f}\right)^2}J_1\left(\frac{x_{01}r}{a}\right)$$

$$H_{\varphi01} = \frac{jE_{01}(f/f_{cTM01})}{\eta_0}J_1\left(\frac{x_{01}r}{a}\right)$$

而 $H_{r01} = E_{\varphi01} = 0$。因此一周期时间内平均坡印廷矢量的值为

$$\bar{S} = \frac{1}{2}E_{r01}H_{\varphi01}^* = \frac{|E_{01}|^2(f/f_{cTM01})^2\sqrt{1-(f_{cTM01}/f)^2}}{2\eta_0}J_1^2\left(\frac{x_{01}r}{a}\right)$$

在截面上积分，可知

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} J_1^2\left(\frac{x_{01} r}{a}\right) r dr d\varphi = \frac{2A_g}{x_{01}^2}\int_0^{x_{01}} J_1^2(v) v dv = A_g J_1^2(x_{01})$$

综合这些结果，得

$$\alpha_w = \frac{P_{loss}(0)}{2\bar{P}_{zTM01}} = \frac{R_s}{\eta_0\ a\ \sqrt{1-(f_{cTM01}/f)^2}} \tag{2}$$

用数据表示，有

$$f_{cTM01} = \frac{u_0}{2\pi a}x_{01} = \frac{3\times 10^8}{2\pi(5\times 10^{-3})}(2.405) = 22.99\ \text{GHz}$$

$$f = (1.3)(22.99) = 29.89\ \text{GHz}$$

$$R_s = \sqrt{\frac{\pi f \mu_w}{\sigma_w}} = \sqrt{\frac{\pi(29.89\times 10^9)(4\pi\times 10^{-7})}{58\times 10^6}} = 0.0451\ \Omega$$

$$\alpha_w = \frac{0.0451}{(377)(5\times 10^{-3})\sqrt{1-(1/1.3)^2}} = 0.0374\ \text{Np/m} = 0.325\ \text{dB/m}$$

补 充 习 题

16.28 在自由空间中，确定磁场

$$H_z(x,y,z,t) = K\cos 87.3x\cos 92.4y\cos(2\pi f t - 109.1z)$$

存在的条件。

答案：$f = 8.0$ GHz

16.29 求在 $\mu_r = 1$ 和 $\varepsilon_r = 2.2$ 的介质中传播的 4GHz 波的临界波数，如果相移常数（波数）为 54°/cm。

答案：81.1 rad/m

16.30 如果习题 16.28 中的 $H_z(x,y,z,t)$ 是矩形波导 TE_{21} 波的轴向场，求 (a) 波导尺寸，(b) 临界波数，(c) 波导波长。

答案：(a) 7.2 cm×3.4 cm；(b) 127.1 rad/m；(c) 5.76 cm

16.31 习题 16.18 中的 S 波段波导使用在 X 波段，工作频率为 9 GHz。确定波导中可以传播的模式。

答案：TE_{01}，TE_{02}，TE_{10}，TE_{11}，TE_{20}，TE_{21}，TE_{30}，TE_{31}，TE_{40}；TM_{11}，TM_{21}，TM_{31}

16.32 习题 16.19 中，在已知频率下还可以传播哪些模式？

答案：TE_{01}，TE_{11}，TE_{21}，TE_{31}；TM_{21}

16.33 C 波段矩形波导的尺寸为 4.755cm×2.215cm，使用于 3.95～5.85GHz 之间。对于空气电介质，当工作频率为 4.2GHz 时，计算主模的截止频率和波导波长。

答案：3.155GHz，10.82cm

16.34 具有空气电介质的 WC-50 圆柱形波导主模传播的频率范围为 15.9～21.8GHz。若内直径为 1.270cm，计算截止频率。此外，求 TM_{01} 模的截止频率。

答案：13.84 GHz，18.08GHz

16.35 L 波段空气电介质矩形波导具有 $a/b = 2$，主模的截止频率为 0.908 GHz。如果测量所得的波导波长为 40 cm，求工作频率、波导尺寸和波数。

答案：1.18GHz，16.52cm×8.26cm，1.57 rad/m

16.36 对于习题 16.35 中的波导，求传播 TE_{21} 模的最低频率。

答案：$f > 2.569$ GHz

16.37 在 26.5～40 GHz 之间使用的 V 波段矩形波导的内尺寸为 0.711cm×0.356cm。(a)对于空气电介质，计算主模的临界波数。(b)如果测量所得的波导波长为 1.41 cm，工作频率是多大？

答案：(a) 441.86 rad/m；(b)29.98 GHz

16.38 WC-19 空气电介质圆柱形波导使用在主模的频率为 42.4～58.10 GHz 范围内。求波导的内直径，指定截止频率为 36.776 GHz。

答案：0.478 cm

16.39 Ku 波段空气电介质矩形波导具有 $a/b = 2$，用于 12.4～18.8 GHz 范围内，工作于主模，截止频率为 9.49 GHz。波导的内尺寸是多大？

答案：1.58 cm×0.79 cm

16.40 求空气电介质圆柱形波导的半径和波导波长，主模工作于 $f=30\text{GHz}=1.5f_{c\text{TE11}}$。在这些条件下能否传播 TM_{11} 模？

答案：0.44cm；1.34cm；不能

16.41 对于带有 $\varepsilon_r=2.2$ 的无损耗电介质的波导，求解习题16.40。

答案：0.296 cm，0.903 cm；不能

16.42 K波段矩形波导的尺寸为1.067 cm×0.432 cm，18 GHz时工作于主模。如果电介质是空气，求截止频率、波导波长、相速和波阻抗。

答案：14.06 GHz，2.67 cm，4.81×10^8m/s，604.2Ω

16.43 如果波导用 $\varepsilon_r=2.0$ 的无损耗电介质填充，求解习题16.42。

答案：9.93 GHz，1.44 cm，2.54×10^8m/s，319.6Ω

16.44 在一空气电介质圆柱形波导中，当 TM_{11} 模工作于 $f=30\text{GHz}=1.5f_{c\text{TM11}}$ 时，计算波导的半径和波导波长。（对照习题16.40。）

答案：0.915 cm，1.342 cm

16.45 对工作于截止频率以下的(m,n)模，**截止衰减系数**定义为 $\alpha_{cmn}=-jk_{mn}$。当2.286cm×1.016cm的无损耗空气电介质矩形波导工作于9.4 GHz时，计算 $\alpha_{c\text{TE11}}$（单位：dB/cm）。

答案：23.9

16.46 在矩形波导的某一截面内，E的瞬时分量为

$$E_y=-A\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right),\qquad E_x=B\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right),\quad E_z=0$$

画出这个场E的草图并确定工作模式。

答案：见图16-6，TE_{11}

16.47 2.6 GHz时，习题16.23中的空气电介质波导传输200 W的平均功率。求场的激励电平。

答案：143 V/cm

16.48 习题16.47中的波导用 $\varepsilon_r=1.8$ 的无损耗电介质填充，计算传输功率为200 W时的激励电平。

答案：106.8 V/cm

16.49 习题16.24中的空气电介质波导用 $\varepsilon_r=2.1$ 的无损耗电介质填充。如果激励电平和频率不变，求以主模传播时的传输功率。

答案：0.09 A/cm

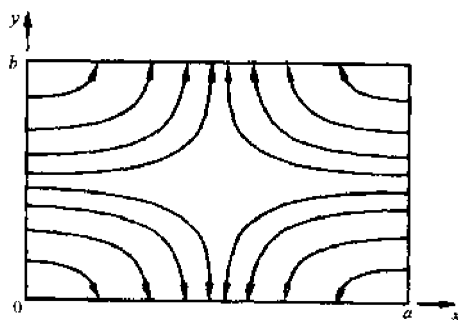


图16-6

16.50 说明习题16.27中的结论(2)又可写为 $\alpha_w=\dfrac{1}{\sigma_w a\delta_w\eta_{\text{TM11}}}$，其中 δ_w 是透入深度（与频率有关）。

第 17 章 天 线

（作者： K. L. Lee）

17.1 引言

在第 14 章中分析了麦克斯韦方程组，并预测了在无源无界的区域内可以传播平面波。本章将分析由电流源或天线产生的电磁波的传播情况。一般来说，这些波具有球面波阵面和与方向有关的振幅。本章仅对真空区域分析，所以关于媒质的介电常量、磁导率、波速和特征阻抗的符号都省去了下标 0；同样，辐射波数（相移常数）写成 $\beta=\omega\sqrt{\mu\epsilon}=\omega/u$。

17.2 电流源和场 E、H

9.7 节中定义了矢量磁位 **A**，它可以描述在电流源以外区域相量形式的矢量场：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H} &= \frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A} = \frac{u}{\eta}\nabla\times\mathbf{A} \\
\mathbf{E} &= \frac{1}{j\omega\epsilon}\nabla\times\mathbf{H} = \frac{1}{j\omega\mu\epsilon}\nabla\times\nabla\times\mathbf{A} = \frac{u}{j\beta}\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

式中 $u=3\times10^8\,\text{m/s}$，$\eta=120\pi\,\Omega$。

矢量 **A** 由下式给出：

$$
\mathbf{A}=\int_{\text{体积}}\frac{\mu(\mathbf{J}_s e^{-j\beta r})}{4\pi r}dv \tag{2}
$$

在式(2)中，r 是观测点与电流源源点 $\mathbf{J}_s dv$ 之间的距离。当把 **A** 转换成时域形式时，因子 $e^{-j\beta r}$ 的重要性就变得很清楚了：

$$
\mathbf{A}=\int_{\text{体积}}\frac{\mu\mathbf{J}_s\cos\omega(t-r/u)}{4\pi r}dv
$$

因此，在观测点处的 **A** 恰好反映了当前时刻以前的源点的状态——它是已知源点的状态经过时间 r/u 后传播到观测点的状态。

17.3 电偶极子(赫兹偶极子)天线

由式(2)可得出图 17-1 中无限小电流元产生的矢量磁位为

$$
\mathbf{A}(P)=\frac{\mu e^{-j\beta r}}{4\pi r}(Idl)\mathbf{a}_z
$$

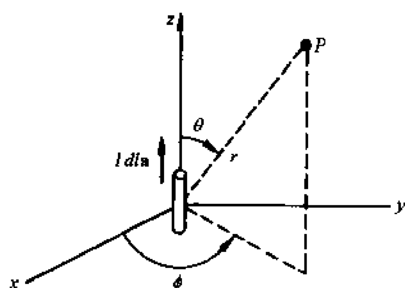


图 17-1

在球坐标系中，$\mathbf{a}_z=\cos\theta\mathbf{a}_r-\sin\theta\mathbf{a}_\theta$。由式(1)可得

$$
H_\varphi=\frac{Idl}{4\pi}\beta^2\sin\theta\, e^{-j\beta r}\left(\frac{j}{\beta r}+\frac{1}{\beta^2r^2}\right)
$$

$$
E_r=\eta\frac{2Idl}{4\pi}\beta^2\cos\theta\, e^{-j\beta r}\left(\frac{1}{\beta^2r^2}-j\frac{1}{\beta^3r^3}\right)
$$

$$
E_\theta=\eta\frac{Idl}{4\pi}\beta^2\sin\theta\, e^{-j\beta r}\left(j\frac{1}{\beta r}+\frac{1}{\beta^2r^2}-j\frac{1}{\beta^3r^3}\right)
$$

其他场分量都为零。若仅考虑**远场**情况，则上式中含有 $1/r^2$ 和 $1/r^3$ 的项可以忽略，成为

$$
\begin{aligned}
H_\varphi &= \frac{jIdl\beta}{4\pi r}\sin\theta\, e^{-j\beta r} \\
E_\theta &= \eta\frac{jIdl\beta}{4\pi r}\sin\theta\, e^{-j\beta r}=\eta H_\varphi
\end{aligned}
\tag{3}
$$

显然式(3)代表发散球面波,波在任意点的传播方向为 $+\mathbf{a}_r$,振幅按 $1/r$ 衰减。

赫兹偶极子的辐射功率可以通过远场的时间平均坡印廷矢量(见 14.12 节)

$$\mathbf{\Lambda}_{avg} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*)$$

在球面上积分得出:

$$P_{rad} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathbf{\Lambda}_{avg}\cdot r^2\sin\theta d\theta d\varphi\mathbf{a}_r = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{2}\mathrm{Re}(E_\theta H_\varphi^*)\right]r^2\sin\theta d\theta d\varphi$$

$$= \frac{\eta(\beta Idl)^2}{12\pi} = \frac{\pi\eta I^2}{3}\left(\frac{dl}{\lambda}\right)^2 \tag{4}$$

17.4　天线参数

辐射电阻 R_{rad}定义为一个等效电阻,其消耗的功率与同一电流馈电的天线向外辐射的功率相同。因此,$P_{rad} = \frac{1}{2}I_0^2R_{rad}$,或者 $R_{rad} = 2P_{rad}/I_0^2$,式中 I_0 是馈源点的电流峰值。对于赫兹偶极子,由式(4)可得

$$R_{rad} = \frac{2\pi\eta}{3}\left(\frac{dl}{\lambda}\right)^2 \approx 790\left(\frac{dl}{\lambda}\right)^2 \quad (\Omega)$$

方向图函数 $F(\theta,\varphi)$描述了远场区电场或磁场的振幅随方向的变化情况。对于赫兹偶极子,因$|\mathbf{E}|$和$|\mathbf{H}|$与 φ 无关,所以方向图函数 $F(\theta,\varphi)$简化为 $F(\theta) = \sin\theta$。

辐射强度 $U(\theta,\varphi)$是衡量天线性能的另一个量,其定义为单位立体角内时间平均辐射功率。由图 17-2,可知

$$U(\theta,\varphi) \equiv \frac{dP_{rad}}{d\Omega} = \frac{|\mathbf{\Lambda}_{avg}|\,dS'}{dS'/r^2} = r^2|\mathbf{\Lambda}_{avg}|$$

因为 U 与 r 无关(由能量守恒可知),所以可用远场估计 U。对于赫兹偶极子,有

$$U(\theta) = \frac{\eta}{8}\left(\frac{Idl}{\lambda}\right)^2\sin^2\theta \tag{5}$$

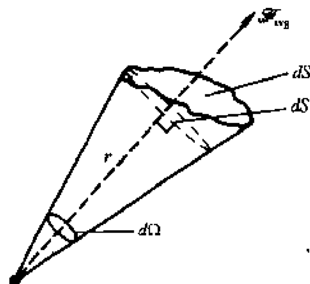


图 17-2

图 17-3 给出了赫兹偶极子的方向图函数的极点图和辐射强度的分布图。

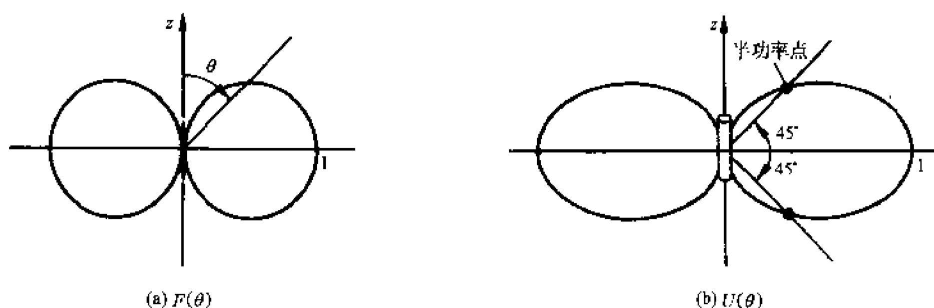


图 17-3

在图 17-3(b)中,**半功率点**在 $\theta = 45°$和 $\theta = 135°$的直线上,所以**半功率射束宽度**为 90°。一般来讲,关于 U_{max}方向的射束宽度越窄,天线的方向性越好。

天线的**方向增益** $D(\theta,\varphi)$定义为天线的辐射强度 $U(\theta,\varphi)$与能够向各个方向均匀辐射相同的总功率的**各向同性辐射体**的辐射强度 U_0 的比。对于**各向同性辐射体**,辐射强度为

$$U_0 = \frac{P_{rad}}{4\pi}$$

所以

$$D(\theta,\varphi) = \frac{U(\theta,\varphi)}{U_0} = \frac{4\pi U(\theta,\varphi)}{P_{rad}}$$

天线的**指向性**是天线的方向增益的最大值：

$$D_{max}=\frac{4\pi U_{max}}{P_{rad}}$$

对于赫兹偶极子，由式(4)和(5)可得

$$D(\theta,\varphi)=\frac{(4\pi)\,\frac{\eta}{8}\left(\frac{Idl}{\lambda}\right)^2\sin^2\theta}{\left(\frac{\eta\pi}{3}\right)\left(\frac{Idl}{\lambda}\right)^2}=1.5\sin^2\theta$$

和

$$D_{max}=1.5 \tag{6}$$

天线的**辐射效率**为 $\varepsilon_{rad}\equiv P_{rad}/P_{in}$，其中 P_{in} 是天线从馈源中吸收的时间平均功率。**(功率)增益** $G(\theta,\eta)$ 定义为辐射效率与方向增益的乘积：

$$G(\theta,\varphi)\equiv\varepsilon_{rad}D(\theta,\varphi)=\frac{4\pi U(\theta,\varphi)}{P_{in}}=\frac{4\pi U(\theta,\varphi)}{P_{rad}+P_L}$$

其中 P_L 是天线的欧姆损耗。无损耗无向天线的功率增益为 $G_0=1$。天线的功率增益常用分贝表示，有

$$G_{dB}=10\log_{10}\frac{G}{G_0}=10\log_{10}G$$

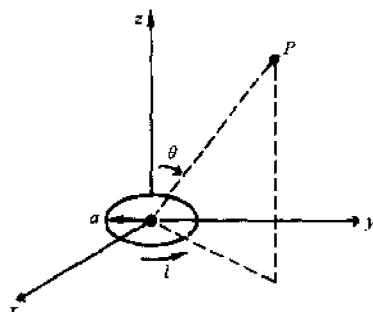


图 17-4

17.5　小圆环天线

在平面 $z=0$ 上一个通有相量电流 $I\mathbf{a}_\varphi$ 的小圆环即**磁偶极子**，产生的 **E** 和 **H** 的辐射场与赫兹偶极子产生的辐射场特性相似，所不同的是两者产生的辐射场 **E** 和 **H** 的方向应相互交换。在远场区，有

$$H_\theta=-\frac{(\beta^2\pi a^2)Ie^{-j\beta r}}{4\pi r}\sin\theta,\qquad E_\varphi=-\eta H_\theta$$

习题 17.6 得出了小圆环天线的辐射电阻 $R_{rad}=(20\Omega)(\beta^2\pi a^2)^2$。

17.6　有限长偶极子

在赫兹偶极子的辐射功率表达式(4)中包含有项 $(dl/\lambda)^2$，该项表明导线的长度应与波长相当。如图 17-5(a)所示，开路的双导线传输线中的电流是不同相的，结果使远场几乎消失。相反，如图 17-5(b)所示，当两导线张开时就构成一个天线，其产生的电流相量为

$$I_1(z')=I_m\sin\beta\left(\frac{L}{2}-z'\right)\qquad(0<z'<L/2)$$

和

$$I_2(z')=I_m\sin\beta\left(\frac{L}{2}+z'\right)\qquad(-L/2<z'<0)$$

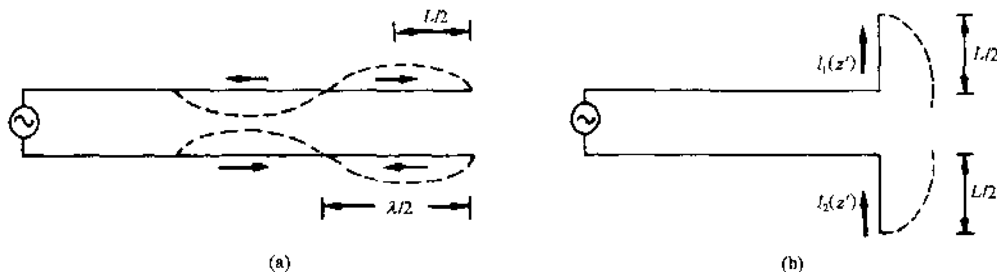


图 17-5

它们在 y 轴的镜像点上是完全同相的，并且在端点 $z'=\pm L/2$ 处均为零。两条支路构成一个长为 L 的单偶极天线。应该指出的是馈源点($z'=0$)处的电流与最大电流的关系为 $I_0=I_m$ sin

$\frac{\beta L}{2}$。

在假设 $r \gg L$ 和 $r \gg \lambda$ 的条件下，由式(2)和(1)可计算出远场的场量：

$$H_\varphi = \frac{jI_m e^{-j\beta r}}{2\pi r}F(\theta), \qquad E_\theta = \eta H_\varphi$$

式中方向图函数为

$$F(\theta) = \frac{\cos\left(\beta\frac{L}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\beta\frac{L}{2}\right)}{\sin\theta}$$

也可以指定出天线的**有效长度**[令 $I_1(z') = I_m\sin\beta(L/2 - |z'|)$]：

$$h_e(\theta) = \frac{\sin\theta}{I_0}\int_{-L/2}^{L/2} I(z')e^{j\beta z'\cos\theta}dz' = \frac{2I_m}{\beta I_0}F(\theta)$$

该式含有长度单位且包含了所有方向的信息。

当 L 大约等于 1.2λ 时，天线的方向图与数字"8"的形状相似；当 L 趋向于 1.2λ 时，天线的方向图变尖。在 $L \ll \lambda$ 的极限情况下，天线的方向图是赫兹偶极子的方向图，如图 17-3(a)所示。当 L 远远大于 1.2λ 时，方向图变成多瓣形状，见图 17-6。

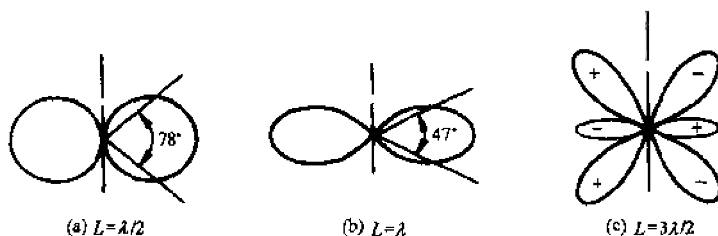


图 17-6

长度为$(2n-1)\lambda/2(n=1,2,3,\cdots)$的有限长偶极子的辐射电阻可表示为

$$R_{rad} = (30\Omega)\mathrm{Cin}[(4n-2)\pi]$$

其中

$$\mathrm{Cin}(x) \equiv \int_0^x \frac{1-\cos y}{y}dy$$

是列表函数。对于 $n=1$(**半波偶极子**)，$R_{rad} = 30(2.438) = 73\Omega$，$D_{max} = 1.64$（见习题 17.8)。

17.7 单极子天线

一根长度为 $L/2$ 的垂直于无限大导电平面的导线构成了一个单极子天线(见图17-7(a))，当从天线的底部馈电时，产生的场 **E** 和 **H** 与偶极子的场相同；当在导电平面下方标出单极子的**镜像**时，上述结论就显而易见，如图(17-7(b))所示。

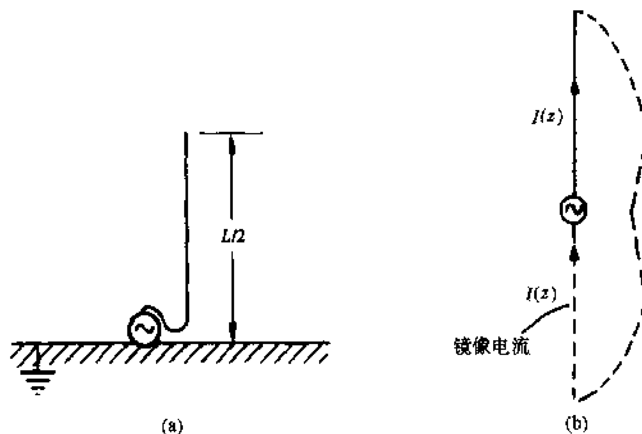


图 17-7

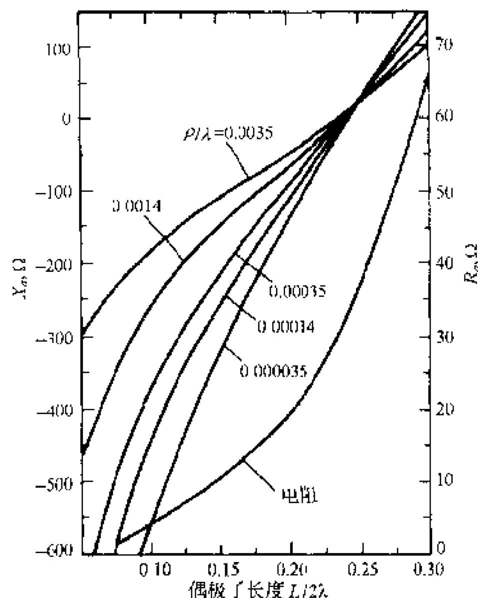


图 17-8 （摘自：Edward C. Jordan/Keith G. Balmain, Electromagnetic Waves and Radiating Systems, 2nd ed., © 1968, p.548. Reprinted by Permission of Prentice-Hall, Inc., Englwood Cliffs, N.J.）

因为单极子仅在导电平面上方区域内辐射能量，所以辐射总功率是相应偶极子的辐射总功率的一半。由式 $R_{rad}=2P_{rad}/I_0^2$ 可导出单极子的辐射电阻是偶极子的辐射电阻的一半。因此，当 $L/2=\lambda/4$（**四分之一波长单极子**）时，$R_{rad}=36.5\Omega$。

17.8 自阻抗和互阻抗

对于馈源，天线相当于一个负载阻抗 $Z_a=R_a+jX_a$，其中 $R_a=R_{rad}+R_L$，R_L 是欧姆电阻。电抗 X_a 难以计算得出，它是单极子和偶极子的导线半径 ρ 的函数。图 17-8 表明了长度为 $L/2$ 的单极子的 R_a 和 X_a 的变化情况；若图中纵坐标的值增加一倍，则该图也适用于长度为 L 的偶极子。因此，对于半波偶极子有 $R_a=73\Omega$ 和 $X_a\approx 40\Omega$，X_a 基本上与 ρ 无关（这表明当 $\rho\to 0$ 时，$X_a\to 42.5$）。

当两个天线位置较近时，一个天线中的电流将在另一个天线上感应出电压。因此，在这一系统中存在有**互阻抗** $Z_{21}=V_{21}/I_1=R_{21}+jX_{21}$。对于两个并排放置的导体尺寸很小的半波偶极子，$R_{21}$ 和 X_{21} 随天线间距离 d 的变化情况如图 17-9 所示。

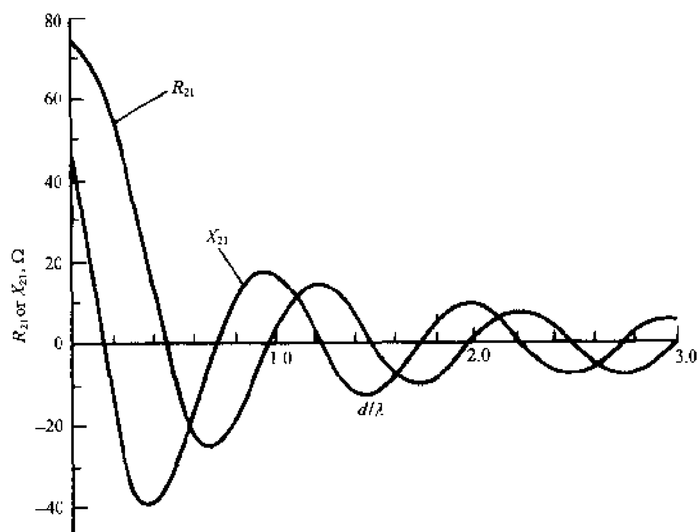


图 17-9 （摘自：Weeks(1968), Antennas Engineering, Reproduced by Permission of McGraw-Hill, Inc.）

17.9 接收天线

位于发射机的远场区的天线，从本质上是从平面波中获得能量，并把能量传递到负载阻抗 Z_l 上。在图 17-10(a)中，偶极子天线位于 z 轴上，入射波的坡印廷矢量为 Δ。开路电压等于有效长度 $h_e(\theta)$ 和投影到入射平面上场量 **E** 的幅值 E 的乘积（对于图 17-10(a)所示的坐标系，$E=\sqrt{E_y^2+E_z^2}$）：

$$V_{OC}=h_e(\theta)E$$

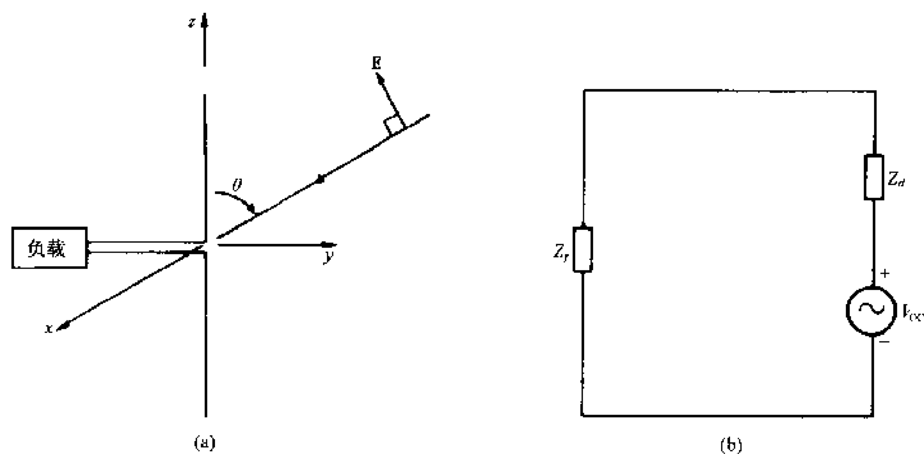


图 17-10

接收天线的方向性与发射天线的方向性相同。**可用功率** P_a 是接收天线传递到负载阻抗上的最大功率，此时应有 $Z_l = Z_a^*$。由图17-10(b)的等效电路，得

$$P_a = \frac{h_e(\theta)^2 E^2}{8R_a}$$

天线的**有效面积** $A_e(\theta)$是当其与入射波的功率密度 $E^2/2\eta$ 相乘等于可用功率时的抽象面积，即

$$A_e(\theta)\left(\frac{E^2}{2\eta}\right) = P_a = \frac{h_e(\theta)^2 E^2}{8R_a} \quad 或 \quad A_e(\theta) = h_e(\theta)^2\left(\frac{\eta}{4R_a}\right)$$

由此可得出有效面积与方向增益的关系为

$$\frac{A_e(\theta,\varphi)}{D(\theta,\varphi)} = \frac{\lambda^2}{4\pi}$$

当同时考虑发射天线和接收天线时，天线1的辐射功率 P_{rad1} 与接收天线2的**可用功率** P_{a2} 的关系由**弗利斯传输公式**表示：

$$\frac{P_{a2}}{P_{\text{rad1}}} = \frac{D_1(\theta_1,\varphi_1)A_{e2}(\theta_2,\varphi_2)}{4\pi r^2}$$

式中 r 是两个天线之间的距离，θ_1 和 φ_1 分别是接收天线在天线1的坐标系中的两个坐标分量。同样，θ_2 和 φ_2 分别是发射天线在天线2的坐标系中的两个坐标分量。

17.10 线性阵列

每个天线元有如图17-11所示的相同的方向性。射束宽度窄、增益高的远场方向图可以通过对相同天线元的排列来获得。阵列的方向图函数等于各个天线元的方向图函数与**阵因子** $f(\chi)$的乘积。习题17.15表明对于 N 个空间相距为 d 的天线元均匀阵列，有

$$f(\chi) = \sum_{n=0}^{N-1} I_n e^{jn\beta d\cos\chi}$$

χ 是阵列轴线与直线OP 之间的夹角。由几何学可知，$\cos\chi = \sin\theta\cos\varphi$。如果天线元的相位逐渐增加使 $I_n = a_n e^{jn\alpha}$ ($n = 0,1,\cdots,N-1$)，则有

$$f(\chi) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{jn(\alpha+\beta d\cos\chi)}$$

定义 $u \equiv \alpha + \beta d\cos\chi$，则

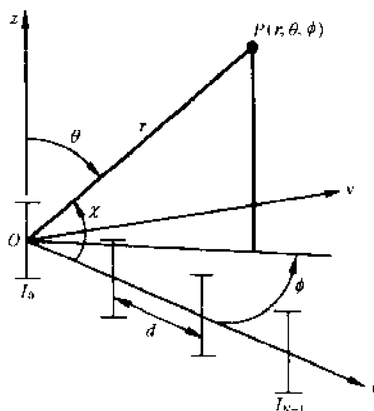


图 17-11

$$f_1(u)=\sum_{n=0}^{N-1}a_n e^{jnu} \tag{7}$$

当 $u=0$ 时，$|f_1(u)|$ 为最大值，总阵列的方向图函数也将有最大值。如果 $\alpha=0$（即所有单个天线元都同相），那么 $u=0$ 意味着 $\chi=\pm 90^\circ$，即辐射峰值发生在与天线的轴线成直角的方向上，这种阵列称为**垂射阵列**。另一方面，如果相位 $\alpha=-\beta d$，那么 $u=0$ 意味着 $\chi=0^\circ$，这种阵列称为**端射阵列**。

均匀阵列的所有天线元中的电流幅值相同。对于 $a_0=a_1=\cdots=a_{N-1}=1$，式(7)变为

$$f_1(u)=\frac{\sin(Nu/2)}{\sin(u/2)}e^{j(N-1)u/2} \tag{8}$$

因此，辐射方向图的主峰或**主波瓣**集中在 $u=0$ 上，"高度"为 $|f_1(0)|=N$。方向图的两个**第一零值**（$|f_1(u)|$ 的零值）发生在 $u=\pm 2\pi/N$ 处。通常用这两个零值之间的距离来定义射束宽度。在 $\theta=90^\circ$ 的平面上，我们可得到：

垂射均匀阵列　　$\Delta\varphi=2\sin^{-1}\dfrac{2\pi}{\beta Nd}\approx\dfrac{2\lambda}{Nd}$

端射均匀阵列　　$\Delta\varphi=4\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{\pi}{\beta Nd}}\approx\sqrt{\dfrac{8\lambda}{Nd}}$

以上是当 $Nd\gg\lambda$ 时的近似表达式。

旁瓣大约出现在两个零值中间。主瓣与第一旁瓣的比值为 $N\sin(3\pi/2N)$，对于大的 N，比值为 $3\pi/2$。

17.11　反射器

通过反射器可以提高天线单元的增益。如图 17-12(a)所示，使用半波偶极天线和角形反射器，可以使增益从 6 dB 提高到 12 dB；当 $\Psi=180^\circ$ 时角形反射器成为平面反射器。

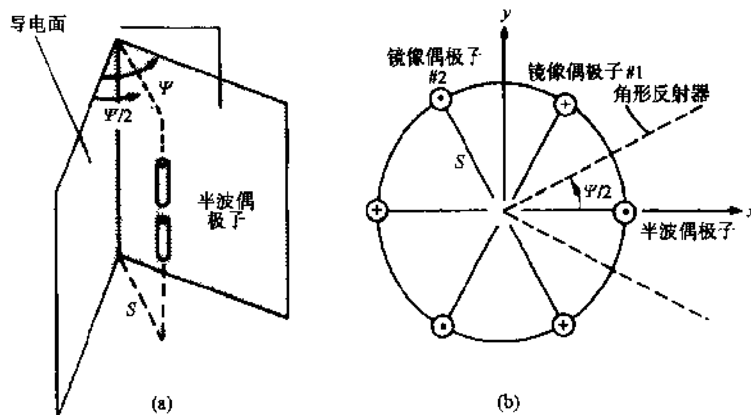


图 17-12

由镜像法可计算出角为 $\Psi=180^\circ/N(N=1,2,3,\cdots)$ 时反射器的效果。实际反射器可由 $2N-1$ 个镜像偶极子所代替，镜像偶极子与真实偶极子共同组成一个沿周向均匀排列、极性交替变化的圆形阵列（见图 17-12(b)），对远场叠加，可得

$$\mathbf{E}=\frac{j\eta I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\sum_{n=0}^{2N-1}(-1)^n e^{j\beta S\sin\theta\cos(n\Psi-\varphi)}\mathbf{a}_\theta \tag{9}$$

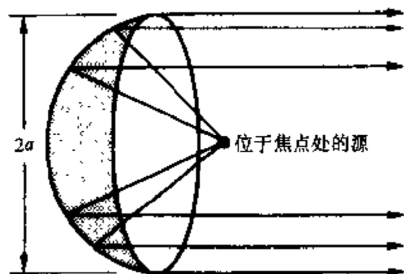


图 17-13

对于高增益的应用场合，广泛使用的是源位于焦点处的抛物面反射器，如图 17-13 所示。抛物面反射器的指向性与抛物面的孔径半径 a 和孔径效率 $\mathscr{E}$ 成比例：

$$D_{\max} = \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2 \mathscr{E}$$

孔径效率取决于设计因数的变化，合理值为 55%。半功率射束宽度可由公式 HPBW≈117°($\lambda/2a$)来估算。

习 题 求 解

17.1 中心馈电的偶极子天线的电长度为 $L/\lambda \ll \frac{1}{30}$，通有 z 方向上的电流。(a)验证电流分布可认为是三角形分布，(b)求出矢量磁位 **A** 的分量。

(a)由于

$$\beta\left(\frac{L}{2} - |z|\right) < \beta\frac{L}{2} = \pi\frac{L}{\lambda} \ll \frac{1}{10}$$

所以

$$I(z') = I_m \sin\beta\left(\frac{L}{2} - |z'|\right)$$

$$\approx I_m\beta\left(\frac{L}{2} - |z'|\right) \approx \frac{2I'_m}{L}\left(\frac{L}{2} - |z'|\right)$$

式中 $I'_m = I_m\frac{\beta L}{2}$。

(b) $$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_{-L/2}^{L/2} I(z')\mathbf{a}_z\left(\frac{e^{-j\beta r}}{r}\right)dz' = \frac{2\mu I'_m e^{-j\beta r}}{4\pi L r}\int_{-L/2}^{L/2}\left(\frac{L}{2} - |z'|\right)dz'\mathbf{a}_z = \frac{\mu I'_m}{4\pi r}\left(\frac{L}{2}\right)e^{-j\beta r}\mathbf{a}_z$$

由上式可得

$$A_r = A_z\cos\theta = \frac{\mu I'_m}{4\pi r}\left(\frac{L}{2}\right)e^{-j\beta r}\cos\theta$$

$$A_\theta = -A_z\sin\theta = -\frac{\mu I'_m}{4\pi r}\left(\frac{L}{2}\right)e^{-j\beta r}\sin\theta$$

$$A_\varphi = 0$$

17.2 (a)0.01m 长的赫兹偶极子以 100 MHz 的频率辐射出 100W 的功率，求所需要的电流。(b)求在球坐标系中点(100, 90°, 0°)处 **E** 和 **H** 的幅值。

(a) $$\lambda = \frac{3\times10^8}{10^8} = 3\text{m}, \qquad R_{\text{rad}} = 790\left(\frac{dl}{\lambda}\right)^2 = 8.78\times10^{-3}\Omega$$

$$R_{\text{rad}} = \frac{2P_{\text{rad}}}{I^2}, \qquad I = \sqrt{\frac{200}{8.78\times10^{-3}}} = 151\text{A}$$

(如此大的电流说明，天线的长度远小于波长时，天线的辐射效率很低。)

(b) $$|\mathbf{E}| = \frac{\eta\beta I dl}{4\pi r}\sin 90° = 0.95\text{V/m}, \qquad |\mathbf{H}| = 2.52\times10^{-3}\ \text{A/m}$$

17.3 如图 17-14 所示，两个 z 方向上的赫兹偶极子相位相同，两者之间的距离为 d。求在方向(θ, φ)上的辐射强度。

由于 $\cos\alpha = \sin\theta\sin\varphi$，所以

$$r_1 \approx r - \frac{d}{2}\cos\alpha = r - \frac{d}{2}\sin\theta\sin\varphi \quad 和 \quad r_2 = r + \frac{d}{2}\sin\theta\sin\varphi$$

则远场电场为 $\mathbf{E} = E_\theta\mathbf{a}_\theta$，其中

$$E_\theta = \frac{Idl}{4\pi r_2}e^{-j\beta r_2}(j\beta\eta\sin\theta) + \frac{Idl}{4\pi r_1}e^{-j\beta r_1}(j\beta\eta\sin\theta)$$

$$\approx \frac{j\beta\eta(Idl)}{4\pi r}e^{-j\beta r}\sin(e^{j\beta(d/2)\sin\theta\sin\varphi} + e^{j\beta(d/2)\sin\theta\sin\varphi})$$

$$= \frac{j\beta\eta(Idl)}{2\pi r}e^{-j\beta r}\sin\theta\cos\left(\beta\frac{d}{2}\sin\theta\sin\varphi\right)$$

因此 $$U = r^2\left(\frac{E_\theta^2}{2\eta}\right) = \frac{\eta(\beta Idl)^2}{8\pi^2}\sin^2\theta\cos\left(\beta\frac{d}{2}\sin\theta\sin\varphi\right)$$

当 $d \ll \lambda$ 时，余弦项接近于1，则 $U \approx \frac{\eta(\beta Idl)^2}{8\pi^2}\sin^2\theta$。

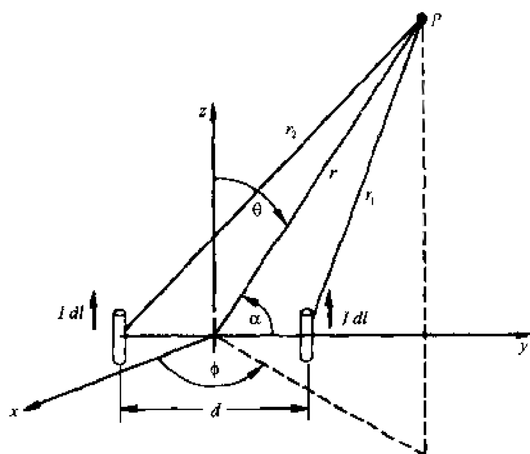


图 17-14

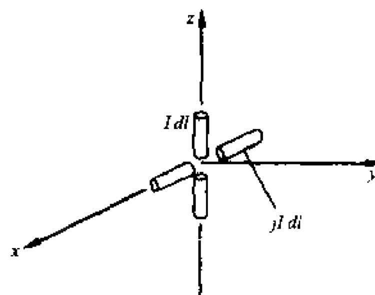


图 17-15

17.4 两个赫兹偶极子相互垂直放置(图17-15)，并由振幅相同、相位相差90°的电流馈电，它们的远场电场为

$$\mathbf{E} = \frac{j\beta\eta(Idl)}{4\pi r}e^{-j\beta r}[(\sin\theta - j\cos\theta\cos\varphi)\mathbf{a}_\theta + (j\sin\varphi)\mathbf{a}_\varphi]$$

求远场区的磁场强度、辐射强度、辐射功率、方向增益和指向性。

$$H_\varphi = \frac{E_\theta}{\eta} = \frac{j\beta(Idl)}{4\pi r}e^{-j\beta r}(\sin\theta - j\cos\theta\cos\varphi)$$

$$H_\theta = -\frac{E_\varphi}{\eta} = \frac{j\beta(Idl)}{4\pi r}e^{-j\beta r}\sin\varphi$$

$$U = \frac{r^2\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*}{2\eta} = \frac{\eta(\beta Idl)^2}{32\pi^2}(1 + \sin^2\varphi\sin^2\theta)$$

$$P_{rad} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} U\sin\theta\, d\theta d\varphi = \frac{\eta(\beta Idl)^2}{6\pi}$$

$$D(\theta,\varphi) = \frac{4\pi U}{P_{rad}} = \frac{3}{4}(1 + \sin^2\varphi\sin^2\theta)$$

$$D_{max} = D(90°, 90°) = \frac{3}{2}$$

17.5 长度为 $L = 2$m 的赫兹偶极子，工作频率为1MHz。若铜导体圆柱的电导率为 $\sigma_c = 57$MS/m，$\mu_r = 1$，半径 $a = 1$mm，求辐射效率。

由17.4节的定义，可知

$$\varepsilon_{rad} = \frac{P_{rad}}{P_{in}} = \frac{P_{rad}}{P_{rad} + P_{loss}} = \frac{R_{rad}}{R_{rad} + P_L}$$

式中 R_{rad} 是辐射电阻，R_L 是欧姆电阻。半径 a 远大于趋肤深度

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma_c}} \approx \frac{1}{15}\text{mm}$$

所以，可以认为电流被限制在厚度为 δ 的圆柱壳内。

$$R_L = \frac{1}{\sigma_c}\frac{L}{(2\pi a)\delta} = 0.084\Omega$$

$$R_{rad} = (790\Omega)\left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 = (790\Omega)\left(\frac{Lf}{u}\right)^2 = 0.035\Omega$$

$$\varepsilon_{rad} = \frac{0.035}{0.119} = 29.4\%$$

17.6 半径为 $a = \pi^{-1}$m 的圆环天线，工作频率为1MHz，求辐射效率。圆环导线是美国线规

AWG20 导线，其参数为 $a_w = 0.406\text{mm}$, $\sigma = 57\text{MS/m}$, $\mu_r = 1$。

频率为 1MHz 时，趋肤深度为 $\delta = 0.667\mu m$。假设电流局限在厚度为 δ 的表面层内，则欧姆电阻为

$$R_L = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{2\pi a}{2\pi a_w \delta}\right) = 0.206\Omega$$

根据 17.5 节的远场区磁场，有

$$P_{rad} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\eta \mid H_\phi \mid^2 r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{\eta(\beta^2 \pi a^2)^2 I^2}{12\pi} = (10\Omega)(\beta^2 \pi a^2)^2 I^2$$

由上式可得

$$R_{rad} = \frac{2P_{rad}}{I^2} = (20\Omega)(\beta^2 \pi a^2)^2 = 0.39\mu\Omega$$

和

$$\varepsilon_{rad} = \frac{R_{rad}}{R_{rad} + R_L} = 1.89 \times 10^{-4}\%$$

17.7 求长度分别为(a)$L = \lambda/2$ 和(b)$L = (2n-1)\frac{\lambda}{2}(n = 1, 2, \cdots\cdots)$的偶极子天线的辐射电阻。

(a) $$P_{rad} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\mid E_\theta \mid^2}{2\eta_0} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = 30 I_m^2 \int_0^{\pi} \frac{\left\{\cos\left(\beta \frac{L}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\beta \frac{L}{2}\right)\right\}^2}{\sin\theta} d\theta$$

$$R_{rad} = \frac{2P_{rad}}{I_0^2} = \frac{60 I_m^2}{I_0^2}\int_0^{\pi} \frac{\left\{\cos\left(\beta \frac{L}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\beta \frac{L}{2}\right)\right\}^2}{\sin\theta} d\theta$$

对于半波长偶极子，$L = \lambda/2$, $I_m = \dfrac{I_0}{\sin\left(\beta \frac{L}{2}\right)} = I_0$，所以

$$R_{rad} = 60\int_0^{\pi} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} d\theta$$

令 $x = \cos\theta$，有

$$R_{rad} = 60\int_{-1}^{1} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{(1 - x^2)} dx = \frac{30}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1 + \cos\pi x}{1 - x} + \frac{1 + \cos\pi x}{1 + x}\right) dx$$

因为括号内两项相等，从而

$$R_{rad} = 30\int_{-1}^{1}\left(\frac{1 + \cos\pi x}{1 + x}\right) dx$$

令 $y = \pi(1 + x)$，可得

$$R_{rad} = 30\int_0^{2\pi}\left(\frac{1 - \cos y}{y}\right) dy = 30\ \text{Cin}(2\pi)$$

$$R_{rad} = 30(2.48) = 73\ \Omega$$

(b)对于 $L = (2n-1)\frac{\lambda}{2}$，用同样的方法可得出

$$R_{rad} = 30\ \text{Cin}[(4n-2)\pi]\ \Omega$$

17.8 求半波偶极子的指向性 D_{max}。

由 17.6 节，对于 $\beta L/2 = \pi/2$，有

$$\mid H_\varphi \mid = \frac{I_0}{2\pi r}\left|\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right| \qquad 因此 \qquad \mid H_\varphi \mid_{max} = \frac{I_0}{2\pi r}$$

当 $\theta = 90°$ 时上式有最大值，从而可导出

$$U_{max} = r^2 \frac{\eta}{2} \mid H_\varphi \mid_{max}^2 = \frac{\eta I_0^2}{8\pi^2}$$

由习题 17.7 可知

$$P_{rad} = \frac{\eta I_0^2}{8\pi}\ \text{Cin}(2\pi)$$

因此 $$D_{max}=\frac{4\pi U_{max}}{P_{rad}}=\frac{4}{\mathrm{Cin}(2\pi)}=1.64。$$

17.9 一个长为 1.5λ 的偶极子以 500MHz 的频率在真空中辐射的时间平均功率为 200W。求在点 $r=100\mathrm{m}$、$\theta=90°$ 处的电场和磁场的幅值。

解 由习题 17.7 可知，$R_{rad}=(30\Omega)\mathrm{Cin}(6\pi)=105.3\Omega$，所以

$$I_0=\sqrt{\frac{2P_{rad}}{R_{rad}}}=\sqrt{\frac{2(200)}{105.3}}=1.95\mathrm{A}$$

对于长为 1.5λ 的偶极子，$|I_0|=|I_m|$。由 17.6 节，得

$$|H_\varphi(100\mathrm{m},90°)|=\frac{|I_m|}{2\pi r}\bigg|_{r=100\mathrm{m}},\quad |F(90°)|=\frac{1.95}{2\pi(100)}(1)=3.1\ \mathrm{mA/m}$$

$$|E_\theta(100\mathrm{m},90°)|=(120\pi)(3.1\times10^{-3})=1.17\mathrm{V/m}$$

17.10 分别求在理想导电平面上垂直方向和水平方向的偶极子的镜像电流。

解 设置理想导体中的基本原则为：正电荷镜像为负电荷，反之亦然。通常，电流归结为正电荷的运动。因此，对于这两个方向的偶极子，其镜像偶极子如图 17-16 所示。

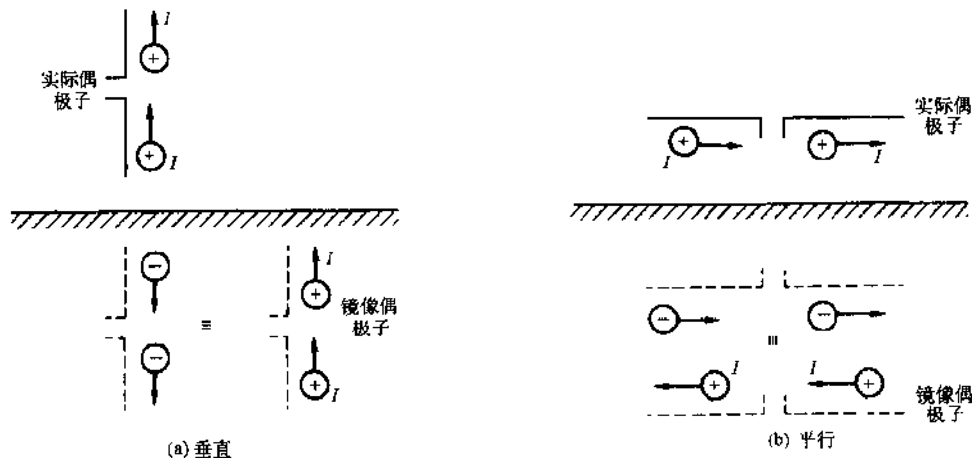


图 17-16

17.11 计算两个相距 $d=\lambda/2$、并排放置的半波偶极子的输入阻抗。假设馈源电流的幅值相同、相位相反。

解 两馈源点的电压为

$$V_1=I_1Z_{11}+I_2Z_{12},\ V_2=I_1Z_{21}+I_2Z_{22}$$

其中 $Z_{12}=Z_{21}$。因此

$$Z_1\equiv\frac{V_1}{I_1}=Z_{11}+\left(\frac{I_2}{I_1}\right)Z_{12},\quad Z_2\equiv\frac{V_2}{I_2}=Z_{22}+\left(\frac{I_1}{I_2}\right)Z_{12}$$

对于半波偶极子，由图 17-8 可得 $Z_{11}=Z_{22}=73+j42.5\Omega$，由图 17-9 可得 $Z_{12}=-12.5-j28\Omega$。从而对于 $I_1=-I_2$，有

$$Z_1=Z_2=73+j42.5-(-12.5-j28)=85.5+j70.5\ \Omega$$

17.12 三个相同的偶极子天线构成线性阵列，天线间距离为 $\lambda/4$，它们的轴线垂直于水平面。馈源电流的幅值为 5A，相位依次滞后 $\pi/2$。已知 $Z_{11}=70\Omega$，$Z_{12}=-(10+j20)\Omega$，$Z_{13}=(5+j10)\Omega$。计算每一个天线的辐射功率和辐射总功率。

解 由 $V_1=I_1Z_{11}+I_2Z_{12}+I_3Z_{13}$，可得

$$Z_1=\frac{V_1}{I_1}=Z_{11}+\left(\frac{I_2}{I_1}\right)Z_{12}-\left(\frac{I_3}{I_1}\right)Z_{13}$$

$$=70+e^{j\pi/2}(-10-j20)+e^{-j\pi}(5+j10)=45\Omega$$

同理，可求出 $Z_2=70\Omega$ 和 $Z_3=(85-j20)\Omega$。从而可得

$$P_{rad1}=\frac{1}{2}|I_1|^2\mathrm{Re}(Z_1)=\frac{1}{2}(25)(45)=562.5\mathrm{W},$$

$$P_{rad2} = 875\text{W}, P_{rad3} = 1065.2\text{W}$$

辐射总功率为 2500 W。

17.13 两个半波偶极子如图 17-17 所示放置，#1 偶极子以 300MHz 的频率发射 300W 的功率。求在接收天线 #2 的终端上感应的开路电压和它的有效面积。

对于半波偶极子($I_0 = I_{max}$)，由 17.6 节可得

$$h_e(\theta) = \frac{2}{\beta}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}$$

当频率为 300MHz 时，$\beta = 2\pi$。对于 #1，有

$$I_{01} = \sqrt{\frac{2P_{rad1}}{R_{rad1}}} = \sqrt{\frac{2(300)}{73}} = 2.87\text{A}$$

对于角度 θ_1 的方向上的远场区，$\mathbf{E}(\theta_1)$ 的幅值为

$$|\mathbf{E}(\theta_1)| = \frac{\eta\beta I_{01}}{4\pi r}h_e(\theta_1) = \frac{\eta I_{01}}{2\pi r}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta_1\right)}{\sin\theta_1}$$

因此

$$|V_{OC2}| = h_e(\theta_2)|\mathbf{E}(\theta_1)| = \frac{\eta I_{01}}{\beta\pi r}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta_1\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta_2\right)}{\sin\theta_1\sin\theta_2}$$

代入数值，可得 $|V_{OC2}| = 0.499\text{V}$。

天线 #2 的有效面积为 $A_e(90^\circ) = \frac{\eta}{4R_{rad}}|h_e(90^\circ)|^2 = 0.131\text{m}^2$。

17.14 对于习题 17.13 中那样放置的天线，求天线 #2 的可用功率。

由 17.9 节可得

$$P_a = \frac{h_e(\theta_2)^2|\mathbf{E}(\theta_1)|^2}{8R_{rad}} = \frac{|V_{OC2}|^2}{8R_{rad}} = \frac{(0.449)^2}{8(73)} = 344\ \mu\text{W}$$

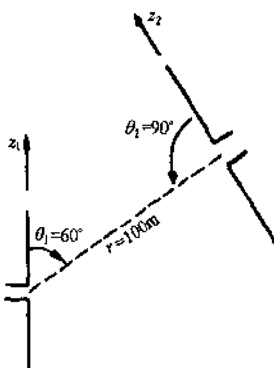


图 17-17

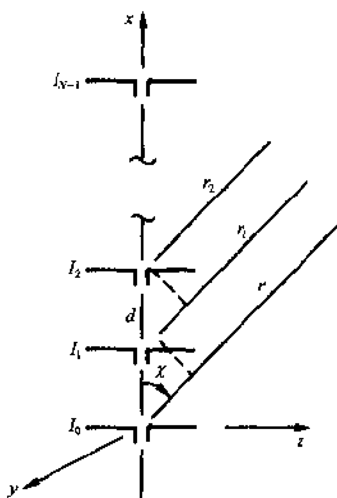


图 17-18

17.15 导出图 17-11(重画为图 17-18)中线性阵列的阵因子。

由 17.6 节可知第 n 个($n = 0, 1, \cdots, N-1$)偶极子的远场区的电场为

$$\mathbf{E}_n = \frac{j\eta I_n e^{-j\beta r_n}}{2\pi r_n}F(\theta)\mathbf{a}_\theta \approx \frac{j\eta I_n e^{-j\beta(r-nd\cos\chi)}}{2\pi(r-nd\cos\chi)}F(\theta)\mathbf{a}_\theta$$

$$\approx\left[\frac{j\eta e^{-j\beta r}}{2\pi r}F(\theta)\mathbf{a}_\theta\right]I_n e^{j\beta nd\cos\chi}$$

由叠加原理可得点 P 处的电场为

$$\mathbf{E}(P) = \sum_{n=0}^{N-1}\mathbf{E}_n = \frac{j\eta e^{-j\beta r}}{2\pi r}[F(\theta)f(\chi)]\mathbf{a}_\theta$$

式中阵因子为

$$f(\chi) = \sum_{n=0}^{N-1} I_n e^{j\beta nd\cos\chi}$$

17.16 假设图 17-11 描述了 $N=10$ 的半波偶极子的均匀阵列，其中 $d=\lambda/2$，$\alpha=-\pi/4$。在平面 xoy 上，设 φ_1 是方向图的主极大值与 x 轴的夹角，φ_2 是方向图的次极大值与 x 轴的夹角。求 $\varphi_1-\varphi_2$。

对于 $\theta=\pi/2$，$\chi=\varphi$，由主极大值时 $u=0$ 的条件可得

$$0=-\frac{\pi}{4}+\pi\cos\varphi_1 \quad 或\ \varphi_1=75.52°$$

当 $u=2\pi/N$ 和 $u=4\pi/N$ 时有最初两个零点，第一个次极大值大约在两个 u 值之间，即 $u=\frac{3\pi}{N}$。因此

$$\frac{3\pi}{10}=-\frac{\pi}{4}+\pi\cos\varphi_2 \quad 或 \quad \varphi_2=56.63°$$

所以

$$\varphi_1-\varphi_2=18.89°$$

17.17 如图 17-19 所示，馈源电流为 I_0 的 z 方向上的半波偶极子与理想导电平面 yoz 之间的距离为 s。求在平面 xoy 上点的远场电场。

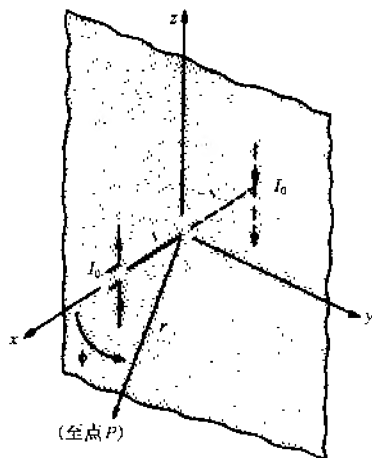


图 17-19

反射器的作用可由馈源电流为 $-I_0$ 的镜像偶极子来模拟。这样，我们可得到 $N=2$ 的偶极子线性阵列，对此，可应用习题 17.15 的结论。作下列替换：

$$N\to 2 \qquad d\to 2s$$
$$\chi\to\varphi \qquad I_0\to -I_0$$
$$r\to r+s\cos\varphi \qquad I_1\to I_0$$

可得出（对于同阶近似）

$$\mathbf{E}(P)=\mathbf{a}_\theta\frac{j\eta e^{-j\beta(r+s\cos\varphi)}}{2\pi r}\cdot\underbrace{(1)}_{F(90°)}\cdot\underbrace{2jI_0e^{j\beta s\cos\varphi}\sin(\beta s\cos\varphi)}_{f(\chi)}$$
$$=\frac{\eta I_0 e^{-j\beta r}}{\pi r}\sin(\beta s\cos\varphi)\mathbf{a}_\theta$$

17.18 对于习题 17.17 中的天线和反射器，辐射功率为 1W 和 $s=0.1\lambda$。(a)忽略欧姆损耗，比较有反射器和无反射器时馈源点电流。(b)比较有反射器和无反射器时在方向 $\theta=90°$ 和 $\varphi=0°$ 上的电场强度。

(a) 平面上有反射器时，馈源点的输入阻抗为 $Z_1=Z_{11}-Z_{12}=(73+j42.5)-Z_{12}$，但由图 17-9 可知，对于 $d=2s=0.2\lambda$，$Z_{12}=(51-j21)\Omega$。因此，$Z_1=(22+j63.5)\Omega$ 和

$$I_{0\text{with}}=\sqrt{\frac{2P_{\text{rad}}}{R_{\text{rad}}}}=\sqrt{\frac{2(1)}{22}}=0.302\text{A}$$

无反射器时，$Z_1=(73+j42.5)\Omega$ 和 $I_{0\text{without}}=\sqrt{\frac{2(1)}{73}}=0.166\text{A}$。

(b) 在点 $P(r,90°,0°)$ 处，由习题 17.17 可得

$$|\mathbf{E}_{\text{with}}|=\frac{\eta I_{0\text{with}}}{\pi r}\sin\frac{\pi}{5}$$

由 17.6 节可得

$$|\mathbf{E}_{\text{without}}|=\frac{\eta I_{0\text{without}}}{2\pi r}$$

因此 $|\mathbf{E}_{\text{with}}|/|\mathbf{E}_{\text{without}}|=2(0.302/0.166)\sin 36°=2.14$。

17.19 半波偶极子与 90° 角形反射器的顶点相距 $S=\lambda/2$。已知馈源点电流为 1.0A，求在方向 $\theta=90°$ 和 $\varphi=0°$ 上的辐射强度。

对于 $\phi=90°$ 和 $\beta S=\pi$，由 17.11 节的式(9)，可得

$$E_\theta(90°,0°)=\frac{j\eta I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r}(1)[-1-1+(-1)-1]$$
$$=\frac{-j2\eta(1.0)e^{-j\beta r}}{\pi t}\quad (\text{V/m})$$

从而 $$U(90°,0°)=\frac{r^2\,|E_\theta(90°,0°)|^2}{2\eta}=\frac{2\eta}{\pi^2}=76.4\text{W/sr}$$①

17.20 设计一个频率为300MHz、指向性为30dB的抛物面天线。(a)假设孔径效率为55%，求孔径半径并估计半功率射束宽度。(b)如果反射器使用在150MHz，求天线的方向性和HPBW。

(a) 指向性为30dB时对应于 $D_{max}=1000$，在300MHz时有 $\lambda=1\text{m}$。所以

$$D_{max}=\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2\mathscr{E}\quad 或\quad 2a=\frac{\lambda}{\pi}\sqrt{\frac{D_{max}}{\mathscr{E}}}=13.58\text{m}$$

$$\text{HPBW}\approx(117°)(\lambda/2a)=8.62°$$

(b) 频率减半，波长增加一倍。因此，由(a)可得

$$D_{max}=\frac{1000}{4}=250\approx 24\text{dB}\quad 和\quad \text{HPBW}\approx 2(8.62°)=17.24°$$

补 充 习 题

17.21 在体积 V' 内由时变电流 $\mathbf{J}(\mathbf{r}',t)$ 产生的矢量磁位 $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ 可写为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{\mu}{4\pi}\iiint\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/u)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv'$$

式中 $u=3\times10^8\text{m/s}$。求位于原点处电流为 $\mathbf{I}(t)=I_0e^{-t/\tau}\mathbf{a}_z(\tau>0)$ 的赫兹偶极子的 $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$。

答案：$\frac{\mu(I_0dl)}{4\pi|\mathbf{r}|}e^{-(t-|\mathbf{r}|/u)/\tau}\mathbf{a}_z$

17.22 对于习题17.21中的赫兹偶极子，在 $|\mathbf{r}|\gg u\tau$ 的条件下求 $\mathbf{H}(r,\theta,\varphi)$。

答案：$-\frac{\mu(I_0dl)}{4\pi\tau u|\mathbf{r}|}\sin\theta\, e^{-(t-|\mathbf{r}|/u)/\tau}\mathbf{a}_\varphi$

17.23 角频率为 ω 的赫兹偶极子位于原点。分别求(a) $\beta r=1$，(b) $\beta r=10$ 对应的点处 E_r 和 E_θ 相对于 H_φ 的相位。假设 $0<\theta<90°$。

答案：(a) E_r 滞后于 H_φ 90°，E_θ 滞后于 H_φ 45°；(b) E_r 滞后于 H_φ 90°，E_θ 与 H_φ 同相。

17.24 z 方向上的赫兹偶极子 I_zdl 与另一个 x 方向上的赫兹偶极子有相同的角频率 ω。如果 I_z 超前 I_x 90°，说明在远场区 y 轴上电场是右旋圆极化波。

17.25 若 $d\ll\lambda$，求习题17.3中两个赫兹偶极子的辐射功率。

答案：$\frac{4\pi\eta}{3}\left(\frac{Idl}{\lambda}\right)^2$

17.26 长度为10cm的短偶极子天线，工作频率为30MHz，导线的半径为400μm。假设电流均匀分布。(a)设 $\sigma=57\text{MS/m}$ 和 $\mu=4\pi\times10^{-7}$ H/m，求辐射效率；(b)求最大功率增益；(c)求方向增益为1.0时的角 θ。

答案：(a)42%；(b)0.63；(c)54.71°

17.27 如图17-20所示，考虑 z 方向上长度为 Δl 的赫兹偶极子与位于平面 xoy 上的半径为 a 的圆环的组合。(a)如果 I_z 与 I_φ 同相，求 I_z、I_φ 和 a 之间的关系使各个方向上都是圆极化的。(b)可能是线性极化吗？如果可能，它们之间的相位关系如何？

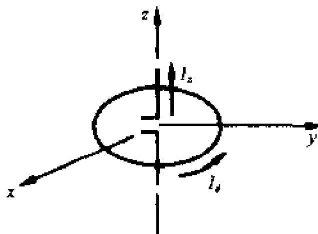


图 17-20

答案：(a) $\frac{I_\varphi}{I_z}=\frac{\lambda\Delta l}{2\pi a^2}$

(b)可能。电流相位必须相差90°。

① 立体角的单位名称是"球面度"，单位符号是 sr。——译者注

17.28 半径为 1cm 的 N 匝圆环天线,工作频率为 100MHz。求当辐射电阻为 10.0Ω 时的匝数 N。

答案:515

17.29 一个铜导体的半波偶极子的工作频率为 200MHz,半径为 406μm。如果 $\sigma = 57$ MS/m和 $\mu = 4\pi \times 10^{-7}$H/m,求辐射效率和最大功率增益。

答案:99.26%,1.63

17.30 当偶极子的长度分别为(a)$3\lambda/4$ 和(b)$3\lambda/2$ 时,求最大电流与偶极子馈源电流的比值。

答案:(a)1.414;(b) −1

17.31 放置在理想导电平面上的短单极子天线,长度为 10cm,导线的半径为 400μm,工作频率为 30MHz。假设电流均匀分布,求辐射效率。已知 $\sigma = 57$MS/m 和 $\mu = 4\pi \times 10^{-7}$H/m。

答案:73.36%

17.32 相距 0.4λ 的两个半波偶极子并排放置。若 $I_1 = 2I_2$,#1 与 75Ω 传输线相连接,求传输线上的驻波比(反射系数 Γ 为$(Z_1 - Z_0)/(Z_1 + Z_0)$,驻波比为$(1 + |\Gamma|)/(1 - |\Gamma|)$)。

答案:1.63

17.33 发射偶极子天线带有两个完全相同的偶极子作为它的寄生元件,两者之间的距离为 0.15λ。已知 $Z_{12} = (64 + j0)\Omega$ 和 $Z_{13} = (33 - j33)\Omega$,求发射偶极子的驱动点阻抗。

答案:$(29.36 + j65.93)\Omega$

17.34 图 17-21(a)中的半波偶极子作为接收天线,入射电场为 $\mathbf{E} = 4.0e^{+j2\pi x}\mathbf{a}_y$(mV/m),设可用功率为 P_{a1}。在图 17-21(b)中,$3\lambda/2$ 的偶极子位于平面 xoy 上,与 y 轴的夹角为 45°,假设入射电场相同,可用功率为 P_{a2}。求 P_{a1}/P_{a2} 的比值。

答案:0.748

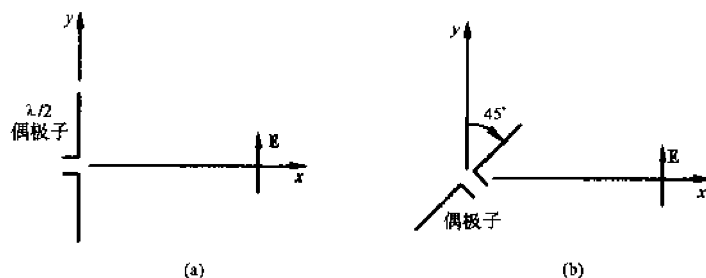


图 17-21

17.35 $3\lambda/2$ 偶极子用来接收频率为 300MHz 的入射波,入射波与天线的轴线呈 45°角,求偶极子的有效面积和方向增益。

答案:0.173 m²,2.18

17.36 考虑由 10 个 z 方向上的半波偶极子组成的均匀阵列,偶极子间的间隙为 $d = \lambda/2$,$\alpha = 0°$。阵列的轴线在 x 轴上,求在点 P_1(100m,90°,0°)和点 P_2(100m,90°,30°)两处 **E** 的幅值的比值。

答案:11.36

17.37 11 个 z 方向的半波偶极子在 x 轴上 $x = 0, \pm\lambda/2, \pm\lambda, \pm 3\lambda/2, \pm 2\lambda, \pm 5\lambda/2$ 处排列。令第 n 个偶极子的馈源电流为 $I_n = I_0 e^{jn\alpha}$。一个中心在点(100m,90°,30°)处的半波偶极子作为接收天线。(a) 求 α 和使接收信号最大的接收偶极子的方向。(b) 当 $I_0 = 1.0$A 时,求在接收天线的终端上的开路电压。

答案:(a) $\alpha = -0.866\pi$;(b) 2.1V

17.38 半波偶极子放置在与 60°角形反射器的顶点相距 $s = \lambda/2$ 处,馈源电流为 1.0A。求在方向 $\theta = 90°$ 和 $\varphi = 0°$ 上的辐射强度。

答案:76.4 W/sr

17.39 两个抛物面反射天线,工作频率分别为 100MHz 和 200MHz,指向性都为 30dB。假设两个反射器的孔径效率都为 55%,求两个反射器孔径的直径比和半功率射束宽度的比值。

答案:1.414,0.707

附　　录

国际单位的词头

因　数	词头名称	词头符号	因　数	词头名称	词头符号
10^{18}	艾[可萨]	E	10^{-1}	分	d
10^{15}	拍[它]	P	10^{-2}	厘	c
10^{12}	太[拉]	T	10^{-3}	毫	m
10^{9}	吉[咖]	G	10^{-6}	微	μ
10^{6}	兆	M	10^{-9}	纳[诺]	n
10^{3}	千	k	10^{-12}	皮[可]	p
10^{2}	百	h	10^{-15}	飞[母托]	f
10	十	da	10^{-18}	阿[托]	a

散度、旋度、梯度和拉普拉斯算子

笛卡儿坐标

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{a}_z$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

圆柱坐标

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{a}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\mathbf{a}_\varphi + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right]\mathbf{a}_z$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\mathbf{a}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

球坐标

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\varphi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right]\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right]\mathbf{a}_\theta$$

$$+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\mathbf{a}_\varphi$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\mathbf{a}_\varphi$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$